



Statik

Unterrichtsplanung für TGT-J1

Inhaltsverzeichnis

- Lehrplan2
- Statik3
- Definition, Zweck3
- Vereinfachungen für die Schule3
- Darstellungen von Kräften3
- Rechnen mit Kräften in der Statik3
- Gleichgewichtsbedingungen (allg.)3
- Die Hauptachsen im Raum3
- Gleichgewichtsbedingungen 3D/2D3
- Aufgabe lösbar in der Ebene?3
- Aufgabe lösbar am Punkt?3
- Das Reaktionsprinzip und seine Folgen3

Statik I: Zentrales Kräftesystem

- Kräfte am Punkt zeichnerisch ermitteln ...4**
- Zusammensetzen von Kräften4
- Arbeitsplan4
- 0. Lageplanskizze4
- 1. Lageplan4
- 2. Kräfteplan4
- 3. Resultierende F_R / Gegenkraft F 4
- Zerlegen von Kräften4
- Arbeitsplan4
- 4. F_R auf 2 Wirklinien verteilen4
- Lösungsgedanke bei grafischen Lösungen .4
- Kräfte am Punkt berechnen5**
- Zusammensetzen – systematische Lsg.5
- Arbeitsplan:5
- 1. Lageplanskizze5
- 2. Koordinatensystem festlegen5
- 3. Tabelle der Kräfte erstellen5
- 4. Kräfte in Komponenten zerlegen5
- 5. Komponenten addieren5
- 6. Betrag $|F_R|$ der Resultierenden5
- 7. Richtung α_R der Resultierenden5
- Zerlegen - individuelle Lösung5
- Prinzip:5
- Rechtwinklige Dreiecke5
- Winkelfunktionen5
- Beliebige Dreiecke5
- Sinussatz5
- Systematische Lösung – Zerlegen6
- 8. Kräftegleichgewichte $\Sigma F_x = 0$ und $\Sigma F_y = 0$6
- Freimachen von Körpern7**
- Zweck7
- Vorgehensweise7
- 1. Baugruppe wählen7
- 2. Alle Kräfte eintragen7
- 3. Bekannte Kräfte mit Richtung7
- 4. Unbekannte Kräfte7
- 5. Lösbarkeit prüfen7
- 6. Lageplanskizze anfertigen7

- Hinweise auf Richtungen von Kräften7
- Seile, Ketten usw.7
- Zweigelenkstäbe (Pendelstützen)7
- Berührflächen7
- Rollkörper7
- Lose und feste Lager8
- Einwertige Lager (Loslager)8
- Zweiwertige Lager (Festlager)8
- Dreiwertige Lager8

Statik II: Allgemeines Kräftesystem

- 3-Kräfteverfahren9**
- Anwendung:9
- Arbeitsplan9
- 0. Lageplanskizze9
- 1. Lageplan9
- 2. Kräfteplan9
- Lösungsgedanke9
- 4-Kräfteverfahren9**
- Anwendung:9
- Arbeitsplan9
- 1. Lageplan9
- 2. Kräfteplan9
- Lösungsgedanke9
- Hinweise zur Konstruktion9
- Auflagerkräfte in der Ebene berechnen . 10**
- Arbeitsplan10
- 1. Freimachen + Lageskizze erstellen10
- 2. Richtungen für unbekannte Kräfte an - nehmen (s.o.).....10
- 3. Gleichgewichtsbedingungen ansetzen + Gleichungssystem lösen10
- mögliche Vereinfachungen10
- 4. Momentengleichgewicht $\Sigma M =$ 10
- Tipp 1: Wahl des Drehpunktes10
- 5 Kräfte in Bemaßungsrichtung zerlegen ... 10
- Tipp 2: Komponenten statt Hebelarm ...10
- Tipp 3: Kraftkomponenten skizzieren ...10
- 6. Kräftegleichgewichte $\Sigma F_x = 0$ und $\Sigma F_y = 0$10
- 7. ggf. zusätzliche Gleichungen10
- 8. Gleichungssystem lösen10
- Wenn es ein Festlager gibt:10
- 9. Betrag und Richtung ermitteln10
- 10. Plausibilität prüfen10
- Schlusslinienverfahren (Auflager zeichne - risch ermitteln)12**
- Anwendung12
- Arbeitsplan12
- 1. Lageplan12
- 2. Kräfteplan12
- 3. KP: Anschluss der unbekanntten Kräfte

- festlegen12
- 4. KP: Pol P wählen12
- 5. KP: Polstrahlen einzeichnen12
- 6. LP: Seilstrahlen übertragen12
- 7. LP: Schlusslinie eintragen12
- 8. KP: Schlusslinie übertragen12
- 9. KP vervollständigen12
- Lösungsgedanke12
- Schlusslinienverfahren in Bildern13

- Schlusslinienverfahren bei 3 gesuchten Beträgen15**
- Anwendung15
- Besonderheiten bei 3 WL15
- 0. Lageplan skizze15
- 2a. Kräfteplan15
- 2b. Kräfteplan15
- Seileckverfahren16**
- Anwendung16
- Prinzip16
- Beispiel16
- Kombination aus SEV und 4KV16**
- Anwendung16
- Arbeitsplan16
- Kräfte mit SEV zusammenfassen16
- Resultierende mit 4KV zerlegen16

Nicht unterrichten

- Kraft und Beschleunigung17**
- Newton 1: Trägheitsprinzip17
- Newton 2: Aktionsprinzip17
- Gewichtskraft17
- Newton 3: Reaktionsprinzip17
- Prinzip von d'Alembert17
- Grundoperationen der Statik18**
- 1. Kräfteparallelogramm18
- 2. Längsverschiebung18
- 3. Erweiterungssatz18
- 4. Parallelverschiebung18
- (Kraft-)Moment einer Einzelkraft18
- Definition18
- Kräftepaare18
- Resultierende Kraft in der Ebene berech - nen.....19**
- Anwendung19
- Arbeitsplan19
- 1. - 7. F_R und α_R wie im zentralen KS19
- 8. Lage von F_G / F_R per $\Sigma M = 0$19
- 8a. Drehpunkt wählen19
- 7b. Momentengleichgewicht $\Sigma M = 0$19
- Literaturverzeichnis19**



Lehrplan

Richtziele des Unterrichts in Jahrgangsstufe 12

Die Schüler ... erkennen die Statik als Grundlage jeder technischen Konstruktion. Sie üben sich in der Anwendung grafischer und algebraischer Lösungsverfahren. Dies zwingt sie zur Sorgfalt, Genauigkeit und zum systematischen Denken.

21 Statik I		15 Stunden
21.1	Bauteile freimachen und Grundoperationen der Statik beherrschen	Kräfte – resultierende, Gleichgewicht, Parallelogramm, Erweiterungssatz, Längs-, Parallelverschiebung
21.2	Resultierende und unbekannte Kräfte bestimmen	Zentrales Kräftesystem – zeichnerische und rechnerische Bestimmung einer Resultierenden – zeichnerische und rechnerische Bestimmung unbekannter Kräfte bei Gleichgewicht
		Statik in der Ebene Kraftmoment (Versatzmoment) Getrennter Lage- und Kräfteplan $FR_x = \sum F_{ix}$; $FR_y = \sum F_{iy}$ $\sum F_{ix} = 0$; $\sum F_{iy} = 0$

Jahrgangsstufe 12.2

30 Statik II		22,5 Stunden
30.1	Resultierende und unbekannte Kräfte bestimmen	Allgemeines Kräftesystem – zeichnerische und rechnerische Bestimmung einer Resultierenden: Seileckverfahren, Momentensatz – zeichnerische und rechnerische Bestimmung unbekannter Kräfte bei Gleichgewicht: Dreikräfteverfahren, Vierkräfteverfahren, Schlusslinienverfahren, Momentensatz
30.2	Technische Bedeutung der Reibung erkennen und Kräfte an Bauteilen mit Reibung bestimmen	Reibung – Reibungsgesetz für Haft- und Gleitreibung – rechnerische und zeichnerische Lösung
		$MR = \sum M_i$ $\sum M_i = 0$ einschließlich schiefe Ebene, ohne Schraube

Jahrgangsstufe 13.1

37 Festigkeitslehre		38 Stunden
37.1	Die an Bauteilen wirkenden Belastungen erkennen, daraus herrührende Beanspruchungsarten unterscheiden und Spannungen zuordnen Die Werkstoffkennwerte R_m ; $R_{p0,2}$; R_e in der Festigkeitsrechnung einsetzen	Grundbegriffe – -Belastungen durch Kräfte und Momente – Normalkräfte, Querkkräfte – Beanspruchung – Zug, Druck, Flächenpressung, Biegung, Abscheren, Torsion – Spannung – Normalspannung, Schubspannung, zulässige Spannung, Sicherheit
37.2	Zug- und Druckbeanspruchung erkennen, Bauteile berechnen	Spannungsverteilung im Zug- bzw. Druckquerschnitt Dimensionierung elastische Verformung Flächenpressung Schraube – -Festigkeitsklassen – -Metrisches Gewinde, Trapezgewinde
37.3	Biegebeanspruchung erkennen, Bauteile berechnen	Spannungsverteilung im Biegequerschnitt Lage und Betrag des maximalen Biegemoments axiales Widerstandsmoment Biegehauptgleichung
37.4	Torsionsbeanspruchung erkennen, Bauteile berechnen	Spannungsverteilung im Torsionsquerschnitt Torsionsmoment polares Widerstandsmoment Torsionsgleichung
37.5	Auf Abscherung beanspruchte Bauteile erkennen, Bauteile berechnen Scherschneidvorgänge erkennen und berechnen	Spannungsverteilung im Scherquerschnitt Scherkraft Scherspannung Scherschneiden Scherfestigkeit Werkstückabmessung Schneidkräfte
		Siehe LPE 19, 21, 30 Normzahlenreihen Keine Vergleichsspannung Kein Verspannungsschaubild Streckenlast auf Punktlast reduzieren Ohne Steinerschen Satz Ohne Schubmodul und Widerstandsgleichung



Statik

Definition, Zweck

Statik ist die Lehre vom Gleichgewicht der Kräfte in Körpern, die in Ruhe oder konstanter geradliniger Bewegung sind. Ihre Ergebnisse sind Grundlage der Festigkeitsrechnung.

Vereinfachungen für die Schule

- alle Körper sind starr
- Reibung wird meist vernachlässigt
- nur 2D-Probleme (in der Ebene)
- Krafteingriff wird auf Punkte reduziert

Darstellungen von Kräften

Kräfte sind Vektoren und gekennzeichnet durch

- Betrag und
- Richtung (Wirklinie WL und Richtungssinn)

F=10N nur Betrag ohne Richtungsangabe
zeichnerisch, Betrag wird durch die Länge dargestellt, Richtung durch sich selbst.

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} 3 \text{ N} \\ 4 \text{ N} \end{bmatrix} = [53,1^\circ; 5 \text{ N}]$$

Rechnen mit Kräften in der Statik

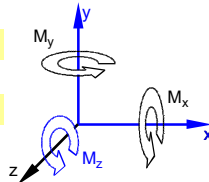
Aus $F = m \cdot a$ und $a=0$ (Statik!) folgt:

Gleichgewichtsbedingungen (allg.)

$$\Sigma F = 0$$

Die Hauptachsen im Raum

(Pfeilrichtung ist +)



Gleichgewichtsbedingungen 3D/2D

Aus $F = m \cdot a$ und $a=0$ (Statik!) folgt (2D bzw. 3D):

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \\ \Sigma M = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \quad \Sigma M_z = 0 \end{aligned}$$

Gelten für jedes Teil und jedes Koordinatensystem.

Aufgabe lösbar in der Ebene?

Für TG liegen alle Kräfte in einer Ebene:

→ es gelten 3 Gleichgewichtsbedingungen

$$\Sigma F_x = 0; \quad \Sigma F_y = 0; \quad \Sigma M = 0$$

Nur 3 unbekannte Größen (Kraftbeträge, Krafrichtungen, Momente) können gelöst werden.

Wer mehr Unbekannte hat, muss weitere Informationen suchen oder die Aufgabe überspringen

Aufgabe lösbar am Punkt?

Im zentralen KS wirken alle Kräfte durch einen Punkt

→ ohne Hebelarme wirken keine (Dreh-)Momente

→ es gelten nur noch 2 Gleichungen

$$\Sigma F_x = 0; \quad \Sigma F_y = 0$$

Im zentralen KS sind nur noch 2 Größen lösbar, z.B.

– eine Kraft nach 1 Betrag und 1 Richtung oder

– 2 Kräfte mit bekannter Richtung

Das Reaktionsprinzip und seine Folgen

Kräfte treten IMMER paarweise auf (actio = reactio)

Um mit Kräften rechnen zu können, muss man die Kräftepaare auftrennen → Freimachen

Vertiefung: keine

FTM, TG:ja; MVK: entfällt

FO Steinmetz-Meisterprüfung, Nürnberg ca. 1570 ([SdW] 11/91)

FO Freiburger Münster [BadZtg] 30.11.2014

- 1) Welche Fachgebiet muss man heutzutage dazu beherrschen? Statik
- 2) Warum lassen wir am TG die konstante geradlinige Bewegung nicht zur Vereinfachung weg?

Konstante geradlinige Bewegung kann man von Ruhe gar nicht unterscheiden – z.B. fliegen wir ziemlich schnell um die Sonne.

- 3) Was wird in der Statik betrachtet? Kräfte.

- 4) Welche Wirkungen haben Kräfte?

Bewegungs- (Thema der Kinetik, wie Statik ein Teilgebiet der Dynamik) oder Formänderungen (meist vernachlässigt): Ideal starre Körper erfahren keine Formänderung durch Kräfte, sodass sich die Kraftangriffspunkte nicht verschieben.

Ursache für Kräfte? $F = m \cdot x \cdot a$; $F = E \cdot x \cdot A \cdot \epsilon$, Reibung (meist vernachlässigt) usw.

- 5) Was muss man von einer Kraft wissen, wenn man mit ihr rechnen will?

Auf den Tisch setzen ($\approx 1kN$), Tisch schieben, am Tisch ziehen.

Der Angriffspunkt der Kraft ist zwar auch wichtig, aber keine der Kraft innewohnende Eigenschaft. Wirklinie ist die Verlängerung des Kraftvektors in beiden Richtungen, Richtungssinn ist die Richtung des Kraftvektors auf der WL.

Bedeutung der Krafrichtung: Man möge versuchen, ein Auto seitwärts anzuschieben.

Müsste genauer $|F| = 10 \text{ N}$ heißen! Einheit Newton [N] = $\text{kg m} / \text{s}^2$

vektoriell, schließt die Richtung ein

- 1) Um wie viele Prozente wird die Rechnung von vereinfacht bei der Reduktion von 3D auf 2D?

FO Flieger

3D bedeutet 3 Kräfte und 3 Momente, 2 D nur 2 Kräfte und 1 Moment, d.h. die Vereinfachung beträgt 50%.

In der Ebene fallen F_z , M_x und M_y weg; Danach ist die Indizierung von M nicht mehr nötig, weil keine Verwechslungsgefahr mehr besteht.

Dreifingerregel: Koordinatensystem mit Daumen (x-Achse), Zeigefinger (y-Achse) und Mittelfinger (z-Achse) der rechten Hand aufspannen.

Rechtehandregel: Daumen der rechten Hand in Richtung der Drehachse, und die Finger weisen in positiver Drehrichtung.

- 2) Wie lauten die Gleichgewichtsbedingungen?

Die zeichnerischen Lösungen beruhen auf denselben Gleichgewichtsbedingungen!

Drehen um die Querachse: Nicken, Stampfen, früher auch Galoppieren ([SdW] 08/2015 S.111)

Im Einzelfall kann es sinnvoll sein, auch andere Krafrichtungen oder Drehpunkte außerhalb des betrachteten Körpers zu wählen.

- 3) Wie viele Unbekannte können mit 6/3 Gleichungen gefunden werden?

Mit 3 Gleichungen kann man 3 unbekannte Kräfte ermitteln (statische Bestimmtheit).

Als statisch bestimmtes ebenes System bezeichnet man einen Körper, der so gelagert ist, dass nur drei unbekannte Auflagerreaktionen angreifen.

Beispiel: Eine Lagerung mit Fest- und Loslager ist statisch bestimmt, eine Lagerung mit 2 Festlagern ist überbestimmt.

Statisch überbestimmte System (mehr Auflagerreaktionen möglich) erfordern weitere Gleichungen zur Lösung (z.B. Dehnung durch Kraft oder Wärme bei zwei Festlagern).

Weniger Auflagerreaktionen heißt einfach, dass das Teil lose ist.

Die statische Bestimmtheit muss in jeder Raumrichtung erfüllt sein.

Fundsachen

Deckenlasten: [Schneider21] S.3.22f: Es werden nicht nur Flächenlasten (Schnee, Wind, Lagergut, ...) berücksichtigt, sondern ggf. Faktoren bei Hubschrauberlandeplätzen, Regelbetrieb bei Gegengewichtstaplern, Böengeschwindigkeitsdruck ... S.3.49: Schneelast: Lörrach gehört zur Zone 2 (Hochschwarzwald 2a = höchste Stufe). Formel ($A = \text{Geländehöhe in [m]}$):

$$S_{01} = 0,25 + 1,91 \cdot \left(\frac{A + 140}{760} \right) \geq 85 \frac{kN}{m^2}$$

Brücken: [Schneider21] S.3.59: Anralllasten (Fahrzeuganprall an Brückenpfeiler), S.3.63 Schwingungsbeiwert für Hauptspur.

Erdbeben: [Schneider21] S.3.66f: Lörrach gehört zur höchsten Erdbebenzone 3v

- 4) Tauziehen mit je 5kN (500kg): Zugkraft im Tau?

Die Zugkraft beträgt 5kN und nicht etwa das Doppelte, denn Kräfte treten IMMER paarweise auf (actio = reactio). Die Kräftepaare addieren sich nicht, sondern heben sich auf, und erfüllen so die Gleichgewichtsbedingung trivial und nutzlos. Um die Gleichgewichtsbedingungen anwenden zu können, muss man die Kräftepaare auftrennen und betrachtet dann alle Kräfte, die von außen auf eine beliebige Baugruppe wirken. Das Verfahren heißt Freimachen und wird unten behandelt.



Statik I: Zentrales Kräftesystem

Kräfte am Punkt zeichnerisch ermitteln

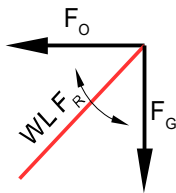
Statik I → Zentrales Kräftesystem → alle Kräfte wirken durch einen Punkt → keine Hebelarme → Es treten keine Momente auf → Gleichgewichtsbedingung $\sum M = 0$ entfällt → nur 2 unbekannte Größen sind lösbar.
[Skolaut 2014] S.24: „Ebenes Kräftegleichgewicht am Punkt“

Zielgruppe: alle
Angewendet werden die statischen Grundoperationen Parallelogramm, Erweiterungssatz, Verschiebesatz. Die ausgeführten Beispiele stammen aus der ersten Quelle:
ulrich-rapp.de/stoff/statik/Statik_Ub_zentral.pdf
[Müller-Breslau I] S.1: „Die graphische Statik lehrt die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte auf geometrischem Wege und entwickelt in gleicher Art die Bedingungen, unter denen sich die auf einen Körper wirkenden Kräfte im Gleichgewicht befinden.“

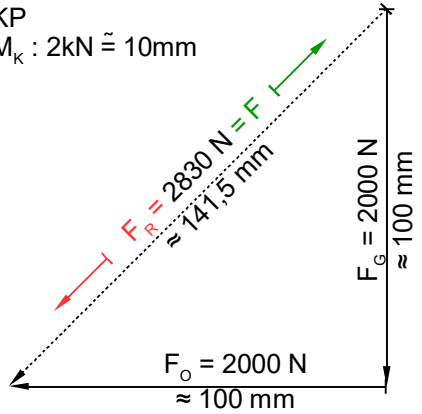
Zusammensetzen von Kräften

TG: Aufg. 1a, Oberleitungsrolle; MVK: [EuroRBM]; FTM: [Böge Aufg.] Aufgabe 29 (Richtung definieren)
LS Seilrolle

LP Seilrolle
 M_L : noch nicht nötig



KP
 M_K : $2\text{kN} \approx 10\text{mm}$



Arbeitsplan

0. Lageplanskizze

= Lageplan ohne formelle Regeln
→ hält den Kopf frei für das Problem

1. Lageplan

Geeignete Baugruppe auswählen, nennen und alle auf die Baugruppe wirkenden Kräfte einzeichnen
– Wirklinien winkeltreu
– Richtungen: wie wirkt RdW auf BG
– Angriffspunkte lagetreu (Lagemaßstab): (nur wenn zeichn. Lösungen für das allg. Kräftesystem im Lehrplan stehen)

2. Kräfteplan

Kräfte eintragen
– maßstabsgerecht (Kräftemaßstab)
– hintereinander als Pfeilkette
– winkeltreu (Parallelverschiebung)

3. Resultierende F_R / Gegenkraft F

F_R (Ersatzkraft) ist die 'Abkürzung im KP' und ersetzt die gegebenen Kräfte F schließt das Kräfteck und hält die gegebenen Kräfte im Gleichgewicht.

Ausmessen, umrechnen mit M_K .

Plausibilitätsbetrachtung

Arbeitsplan kann auch Algorithmus, Kochrezept, Arbeitsanweisung, Vorgehensweise oder neudeutsch Workflow heißen.

Welche Kräfte wirken überhaupt ?

Die LP-Skizze ist ein Entwurf des LP und an keine Form gebunden. Sie ist keine Pflicht, aber empfehlenswert, denn beim Skizzieren kann man die Aufgabe erfassen ohne sich mit Formeln zu belasten. Ich gebe für eine verständliche Skizze ca. 1/4 .. 1/3 der Punktzahl. [Gross 2015] S.2 verwendet den Begriff Freikörperbild statt Lageskizze.

Kräfte eintragen, wo sie wirken.

Der Lageplan ist die zeichnerisch-formale Fassung von "Gegeben und Gesucht".
Im allgemeinen Kräftesystem fließen über den Lagemaßstab der Abstand der Kräfte und damit die Momente ein. Beim zentralen System erübrigt sich das Eintragen der Angriffspunkte, da sie alle an einem Punkt angreifen.
Unbekannte WL können wie gezeigt oder für rechn. Lösungen mit x- und y-Komponenten dargestellt werden.
Richtung: Wie wirkt der Rest der Welt auf die Baugruppe.

Kräfte → geschlossener Linienzug.

Der Kräfteplan ist das Lösungsverfahren und sollte streng vom LP unterschieden werden. Deshalb akzeptiere ich auch keine Parallelogramme, die bei 2 Kräften noch möglich wären. Die Richtungen sollen per Parallelverschiebung übertragen werden, weil es dabei deutlich weniger Fehler gibt. Die gegebenen Kräfte werden richtungsgemäß und maßstabsgerecht so aneinander gereiht, dass sich ein fortlaufender Kräftezug ergibt. Anfangspunkt und Reihenfolge der Kräfte sind beliebig.

Ob die Resultierende oder die Gegenkraft gefragt ist, hängt von der Aufgabe ab. Beide sind gleich groß, aber entgegengerichtet.
Die Resultierende ist die Kraft, die die gegebenen Kräfte ersetzen kann. Beispiel: Wenn auf ein Fahrzeug Antriebskräfte, Luftwiderstand und Rollreibung wirken, kann man diese zusammenfassen und mit der Resultierenden die Beschleunigung zu ermitteln.

Plausibilität: Kann das stimmen?
Vorher Ergebnis abschätzen und nachher Plausibilitätsbetrachtung gehören zu jeder Aufgabe.

Vertiefung

TG: UB Statik zentral; MVK: [EuroRBM].

FTM: [Böge Aufg.] Aufg. 30ff (30 definiert Winkelangabe)

Zerlegen von Kräften

TG: Aufg. 4a: Eimerziehen2; MVK: [EuroRBM]; FTM: [Böge Aufg.] Aufgabe 40f (L), 44f

LP siehe Aufgabe
KP $M_K = 100\text{N} \quad 100\text{mm}$

Arbeitsplan

0-3 wie oben (bek. Kräfte addieren)

4. F_R auf 2 Wirklinien verteilen

– WL einer Kraft parallel verschieben durch den Anfang von F_R und
– WL der anderen Kraft parallel verschieben durch den Endpunkt von F_R .
– Die unbekanntenen Kräfte werden durch den Schnittpunkt begrenzt.
– Richtung der Kräfte einheitlich (mit / gegen Uhrzeigersinn)

Ültg: Aufgabe 3 ist grundsätzlich neu, da nicht eine Kraft gesucht wird, sondern zwei.

Zu diesem Verfahren müssen die Kräfterichtungen bekannt sein. Hinweise auf die Kräfterichtungen hat man bei Seilen, Ketten, Zweigelenstäben, einwertigen Lagern usw. Wenn die Kräfterichtungen nicht bekannt sind, müssen die Drehmomente eingerechnet werden, dies geschieht zeichnerisch im Schlusslinienverfahren. Drei und mehr unbekanntene Kräfte sind ohne Randbedingungen nicht lösbar.

F_R muss im Kräfteplan nicht eingetragen werden.

Vertiefung

TG: UB Statik zentral; MVK: [EuroRBM].

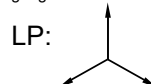
FTM: [Böge Aufg.] Aufgabe 49f.

Fachwerke ([Böge Aufg.] Aufg. 69ff) können vorläufig gelöst werden, indem man sich von Knoten zu Knoten hangelt. Sobald das allgemeine Kräftesystem behandelt ist, kann das Ritter'sche Schnittverfahren verwendet werden.

Lösungsgedanke bei grafischen Lösungen

Alle Kräfte, die sich im Lageplan in einem Punkt treffen, ergeben im Kräfteplan einen geschlossenen Linienzug.

Der geschlossene Linienzug aller Kräfte ist der graphische Ausdruck der Gleichgewichtsbedingungen der Statik.



(Stern ↔ Dreieck ; -)



Kräfte am Punkt berechnen

[Skolaut 2014] S.24: „Ebenes Kräftegleichgewicht am Punkt“

FTM, MVK: kein Zerlegen. TG: volles Programm

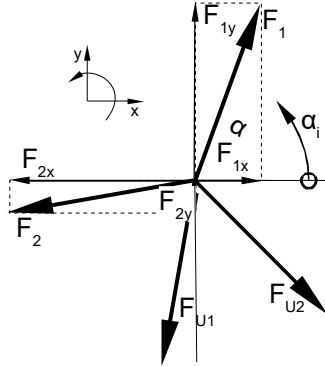
Zusammensetzen – systematische Lsg.

Arbeitsplan:

(ohne KP)

TG: FTM: UB Statik zentral 4a: Mobile Antenne; MVK: [EuroRBM]
Geg: $F_1; F_2$; Ges.: $F_R; F_3; F_4$

Lageskizze mobile Antenne



1. Lageplanskizze
2. Koordinatensystem festlegen
3. Tabelle der Kräfte erstellen

Alle Winkel α von der x-Achse (ccw)!

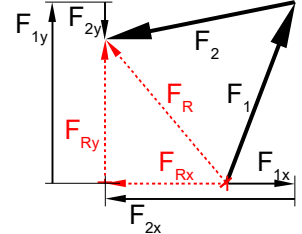
	F [N]	α [°]	F_x [N]	F_y [N]
F_1	250,0	70,0	85,5	234,9
F_2	200,0	190,0	-197,0	-34,7
F_R	229,1	119,1	-111,5	200,2
F_{U1}	76,6	260,0	-13,3	-75,4
F_{U2}	176,5	-45,0	124,8	-124,8
Kontrolle: $\Sigma =$			0,0	0,0

5) Freimachen

Freimachen ist bei allen Statikaufgaben unverzichtbar. Zur Dokumentation genügt eine Skizze. [Gross 2015] S.2 verwendet den Begriff Freikörperbild statt Lageskizze.

6) Komponenten

Skizze: Die Komponenten von F_R setzen sich aus den Komponenten der geb. Kräften zusammen.



7) Winkelangaben

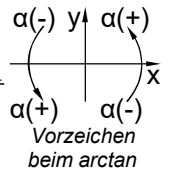
Alle Winkel α ccw (= counter clock wise = gegen den Uhrzeigersinn) von derselben (x-)Achse → Vorzeichen der Komponenten ergeben sich automatisch → weniger Fehler.

Für die Zerlegung in Komponenten muss man genau einmal überlegen, ob man sin oder cos einsetzen muss, danach läuft alles automatisch. Alle x-Komponenten erhalten das eine, alle y-Komponenten das andere. Die Vorzeichen der Komponenten ergeben sich wegen des einheitlichen Bezuges der Winkel auf die x-Achse automatisch.

Komponenten addieren ergibt die Komponenten der Resultierenden F_R . F_n meint den Betrag der n-ten Kraft α ist der Winkel von der x-Achse gegen den Uhrzeiger bis zur Kraft. Vorzeichen von F_{ny} ergeben sich automatisch.

Betrag mit Pythagoras aus den Komponenten berechnen.

Die genaue Richtung α_R bekommt man mit den Komponenten F_{Rx} und F_{Ry} heraus, da rentiert sich kein Algorithmus. Statt Regeln auswendig zu lernen, sollte man das Problem erkennen und nach Plausibilität lösen.



- α ab +x-Achse angeben
- Wenn $F_{Rx} \geq 0 \rightarrow \alpha_R$ zählt ab der +x-Achse
- Wenn $F_{Rx} < 0 \rightarrow \alpha_R$ zählt ab der -x-Achse

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha_1 = 250 \text{ N} \cdot \cos 70^\circ = 85,51 \text{ N}$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha_1 = 250 \text{ N} \cdot \sin 70^\circ = 234,92 \text{ N}$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 200 \text{ N} \cdot \cos 190^\circ = -196,96 \text{ N}$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin \alpha_2 = 200 \text{ N} \cdot \sin 190^\circ = -34,73 \text{ N}$$

$$F_{Rx} = +F_{1x} + F_{2x} = 85,51 \text{ N} + (-196,96 \text{ N}) = -111,45 \text{ N}$$

$$F_{Ry} = +F_{1y} + F_{2y} = +234,92 \text{ N} + (-34,73 \text{ N}) = 200,19 \text{ N}$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = 229,1 \text{ N}$$

$$= \sqrt{(-111,45 \text{ N})^2 + (200,19 \text{ N})^2}$$

$$\alpha'_R = \arctan \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = \arctan \frac{200,19 \text{ N}}{-111,45 \text{ N}} = -60,9^\circ$$

nach links oben

$$\alpha_R = \alpha'_R + 180^\circ = -60,9^\circ + 180^\circ = 119,1^\circ$$

zur +x-Achse

4. Kräfte in Komponenten zerlegen

Komponenten = Kraftanteile in Koordinatenrichtungen

$$F_{nx} = F_n \cos \alpha_n; \quad F_{ny} = F_n \sin \alpha_n$$

5. Komponenten addieren

$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + \dots; \quad F_{Ry} = \Sigma F_{ny}$$

6. Betrag |FR| der Resultierenden

$$|F_R| = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$

7. Richtung α_R der Resultierenden

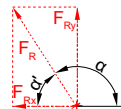
arctan liefert zwei-deutige Werte → Winkel muss präzisiert werden:

- Vorzeichen der Komponenten → Skizze !!
oder

- α ab +x-Achse angeben

Für $F_{Rx} \geq 0$ gilt: $\alpha_R = \alpha'_R$

Für $F_{Rx} < 0$ gilt: $\alpha_R = \alpha'_R + 180^\circ$



Zerlegen - individuelle Lösung

= Durchwursten anhand des Kräfteplans

Prinzip:

8. Lageplanskizze
9. Kräfteplanskizze
10. Kräfte mithilfe KP und Winkelfunktionen berechnen

Rechtwinklige Dreiecke

Zerlegen in rechtwinklig zueinander stehende Komponenten.

Winkelfunktionen

$$F_{Rx} = F_R \cdot \cos \alpha_R$$

$$F_{Ry} = F_R \cdot \sin \alpha_R$$

[Böge Aufg.] Aufg. 42f

Beliebige Dreiecke

Kräfteplanskizze mit der bekannten Kraft F_R und den Wirklinien der unbekannt Kräfte F_{U1} und F_{U2}

Beispiel:

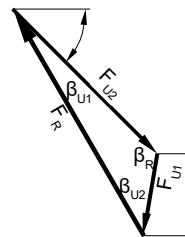
[Böge Aufg.] Aufg. 51

$$F_{U1} = F_R \cdot \frac{\sin \beta_{U1}}{\sin \beta_R} = 229,1 \text{ N} \cdot \frac{\sin 15,9^\circ}{\sin 125^\circ} = 76,6 \text{ N}$$

$$F_{U2} = F_R \cdot \frac{\sin \beta_{U2}}{\sin \beta_R} = 229,1 \text{ N} \cdot \frac{\sin 39,1^\circ}{\sin 125^\circ} = 176,4 \text{ N}$$

Sinussatz

$$\frac{F_R}{\sin \beta_R} = \frac{F_{U1}}{\sin \beta_{U1}} = \frac{F_{U2}}{\sin \beta_{U2}}$$



Für einfache Aufgaben braucht man keinen komplizierten Algorithmus. Oft genügt es, den Kräfteplan zu skizzieren und dann die gesuchten Kräfte mit ein paar Winkelfunktionen zu berechnen. Für individuelle Lösungen muss der Arbeitsplan zwangsläufig sehr allgemein gehalten sein

Das Zerlegen in rechtwinklig zueinander stehende Kräfte ist häufig notwendig und muss von jedem Schüler beherrscht werden.

Skizze mit Werten der Beispielaufgabe

Winkel für das Beispiel:

$$\beta_{U1} = 180^\circ - \alpha_R + \alpha_{U2} = 180^\circ - 119,1^\circ - 45^\circ = 15,9^\circ$$

$$\beta_{U2} = \alpha_R - (\alpha_{U2} - 180^\circ) = 119,1^\circ - (260^\circ - 180^\circ) = 39,1^\circ$$

$$\beta_R = (\alpha_{U1} - 180^\circ) - \alpha_{U2} = (260^\circ - 180^\circ) - (-45^\circ) = 125^\circ$$

$$\text{Kontrolle: } 15,9^\circ + 39,1^\circ + 125^\circ = 180^\circ$$

Auch die Berechnung der Innenwinkel kann man automatisieren, aber der Aufwand lohnt sich nicht ggü. einer individuellen Lösung. Im Fall der Fälle müssen die Kräfteplanskizze und ein paar Überlegungen genügen.

TG: UB Statik zentral, MVK: [EuroRBM]

FTM: [Böge Aufg.] Aufg. 51f

Statik_TA_zentral-rechnerisch.odt

Seitenumbruch

Vertiefung



Systematische Lösung – Zerlegen

FTM, MVK: kein Zerlegen, TG: nur Ergebnis

Die Herleitung der Formel ist ggü. der Lösung mit Sinussatz zu aufwendig, das Auswendig lernen der Formel nicht sinnvoll → individuelle Lösung mit Sinussatz bevorzugen

$$\Sigma F_x = 0 = F_{Rx} + F_{U1x} + F_{U2x} = F_{Rx} + F_{U1} \cdot \cos \alpha_{U1} + F_{U2} \cdot \cos \alpha_{U2}$$

$$\rightarrow F_{U2} = \frac{F_{Rx} + F_{U1} \cdot \cos \alpha_{U1}}{-\cos \alpha_{U2}}$$

$$\Sigma F_y = 0 = F_{Ry} + F_{U1y} + F_{U2y} = \dots \rightarrow F_{U2} = \frac{F_{Ry} + F_{U1} \cdot \sin \alpha_{U1}}{-\sin \alpha_{U2}}$$

$$F_{U2} = \frac{F_{Rx} + F_{U1} \cdot \cos \alpha_{U1}}{-\cos \alpha_{U2}} = \frac{F_{Ry} + F_{U1} \cdot \sin \alpha_{U1}}{-\sin \alpha_{U2}} \rightarrow$$

$$F_{U1} = \frac{-F_{Rx} \cdot \sin \alpha_{U2} + F_{Ry} \cdot \cos \alpha_{U2}}{\cos \alpha_{U1} \cdot \sin \alpha_{U2} - \sin \alpha_{U1} \cdot \cos \alpha_{U2}}$$

$$F_{U2} = \frac{-F_{Rx} \cdot \sin \alpha_{U1} + F_{Ry} \cdot \cos \alpha_{U1}}{\cos \alpha_{U2} \cdot \sin \alpha_{U1} - \sin \alpha_{U2} \cdot \cos \alpha_{U1}}$$

$$F_{U1} = 229,1 \text{ N} \cdot \frac{-\cos 119,1^\circ \cdot \sin(-45^\circ) + \sin 119,1^\circ \cdot \cos(-45^\circ)}{\cos 260^\circ \cdot \sin(-45^\circ) - \sin 260^\circ \cdot \cos(-45^\circ)} = 76,6 \text{ N}$$

$$F_{U2} = 229,1 \cdot \frac{-\cos 119,1^\circ \cdot \sin 260^\circ + \sin 119,1^\circ \cdot \cos 260^\circ}{\cos(-45^\circ) \cdot \sin 260^\circ - \sin(-45^\circ) \cdot \cos 260^\circ} = 176,5 \text{ N}$$

gerechnete Beispiele

[Böge Aufg.] Aufg. 51

Zusammensetzen

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha_1 = 320 \text{ N} \cdot \cos 35^\circ = 262,1 \text{ N}$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha_1 = 320 \text{ N} \cdot \sin 35^\circ = 183,5 \text{ N}$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 180 \text{ N} \cdot \cos 55^\circ = 103,2 \text{ N}$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin \alpha_2 = 180 \text{ N} \cdot \sin 55^\circ = 147,4 \text{ N}$$

$$F_{3x} = F_3 \cdot \cos \alpha_3 = 250 \text{ N} \cdot \cos 160^\circ = -234,9 \text{ N}$$

$$F_{3y} = F_3 \cdot \sin \alpha_3 = 250 \text{ N} \cdot \sin 160^\circ = 85,5 \text{ N}$$

$$F_{Rx} = +F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 262,1 \text{ N} + 103,2 \text{ N} - 234,9 \text{ N} = 130,4 \text{ N}$$

$$F_{Ry} = +F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 183,5 \text{ N} + 147,4 \text{ N} + 85,5 \text{ N} = 416,4 \text{ N}$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = 436,3 \text{ N}$$

$$= \sqrt{(130,4 \text{ N})^2 + (416,4 \text{ N})^2}$$

$$\alpha_R = \arctan \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = \arctan \frac{416,4 \text{ N}}{130,4 \text{ N}} = 72,6^\circ$$

zur positiven x – Achse (nach rechts oben)

1) Herleitung

8. Kräftegleichgewichte $\Sigma F_x = 0$ und $\Sigma F_y = 0$

und die unbekannten Kräfte F_{U1} und F_{U2} per Gleichungssystem lösen

2) F_{U2} analog herleiten oder Symmetrie nutzen

3) Allgemeine Formel

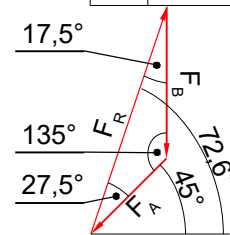
4) Man beachte die Symmetrie der Gleichungen, die mehrfach nützlich sein kann:

- Kontrollmöglichkeit
- Analogieschlüsse
- Ästhetik / Spass an Mathe vermitteln

5) Beispiel: Mobile Antenne

Zerlegen

	F	α	F _x	F _y
F ₁	320N	35°	262,1N	183,5N
F ₂	180N	55°	103,2N	147,4N
F ₃	250N	160°	-234,9N	85,5N
F _R	436,3N	72,6°	130,4N	416,4N
F _A	184,5N	225°	-130,4N	-130,4N
F _B	286,0N	270°	0	-286,0N



$$F_A = F_R \cdot \frac{\sin \alpha_A}{\sin \alpha_R} = 436,6 \text{ N} \cdot \frac{\sin 17,4^\circ}{\sin 135^\circ} = 185 \text{ N}$$

$$F_B = F_R \cdot \frac{\sin \alpha_B}{\sin \alpha_R} = 436,6 \text{ N} \cdot \frac{\sin 27,6^\circ}{\sin 135^\circ} = 286 \text{ N}$$



Freimachen von Körpern

= Bauteile durch Kräfte ersetzen

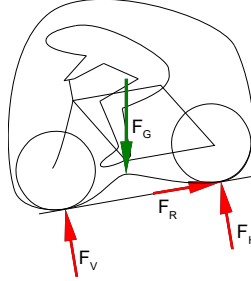
Zweck

- Erkennen aller Kräfte an einer BG
- Voraussetzung für alle Lösungen in der Statik

z.B. tgme HP92/93-1 Mountainbike

Lageskizze Rad + FahrerIn

Ges.: Aufstandskräfte



Vorgehensweise

1. Baugruppe wählen

- Geeignete BG grenzen an gesuchte Kräfte

2. Alle Kräfte eintragen

- An jedem Kontakt zw. der BG und dem Rest der Welt
- \perp rechtwinklig zur Berührfläche (Normalkraft) bzw. \parallel parallel zur Berührfläche (Reibung)
- Gravitation (Gewichtskräfte)

3. Bekannte Kräfte mit Richtung

- Richtungskonvention: Wie wirkt der RdW auf die BG?

4. Unbekannte Kräfte

- Einwertiges Lager: Richtung annehmen
- Zweiwertiges L.: 2 Richtungen eintragen (z.B. F_x, F_y)

5. Lösbarkeit prüfen

- Lösbar sind max. als 3 unbekannte Größen (Beträge und/ oder Richtungen von Kräfte).

Wer zu viele Unbekannte hat, muss Infos suchen:

6. Lageplanskizze anfertigen

- LS dokumentiert die Überlegungen

Hinweise auf Richtungen von Kräften

Seile, Ketten usw.

übertragen nur Zugkräfte in Seilrichtung

Zweigelenkstäbe (Pendelstützen)

= an 2 Stellen drehbar gelagert
übertragen Zug- oder Druckkräfte nur in der Verbindungslinie der Gelenkpunkte.
z.B. Kolben, Gitterstäbe



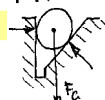
Berührflächen

übertragen Normalkräfte senkrecht und Reibkräfte parallel zur Berührfläche.



Rollkörper

Normalkräfte bei Rollkörper (Kugeln, Rollen) gehen durch ihren Mittelpunkt.



FTM, TG: Erarbeiten anhand der Übungen; MVK: entfällt

"Freimachen" ist das geistig anspruchsvollste Thema, das Technik M am TG zu bieten hat; gleichzeitig ist es die Grundlage zum Lösen von Statikaufgaben. Wer nicht richtig freimacht, braucht gar nicht anfangen zu rechnen... Im zentralen Kräftesystem sind die Aufgaben meist so einfach gestrickt, dass das Freimachen intuitiv möglich ist und seine Bedeutung nicht klar wird. Deshalb führe ich diese Einheit erst danach durch und vertiefe es in den Übungen zum allgemeinen KS. Meine Vorgehensweise: Kurz die Regeln anhand eines Beispiels erklären, dann drillmäßiges Üben

[Skolaut 2014] S.8, S.28: verwendet die Begriff „Freischneiden“ und „Freikörperbild“, letztere neben Kräften auch mit Maßen u.ä.

1) Im System Rad+FahrerIn findet man zahlreiche Kräfte und Gegenkräfte (Kräftepaare):

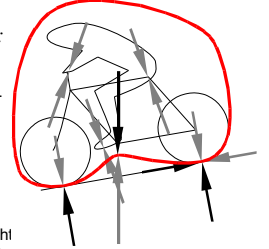
Rad drückt gegen Straße und zurück, vorne wie hinten, Reibung vs. Antriebskraft, Hände vs. Lenker, Gesäß vs. Sattel, Erde zieht an Rad+Fahrer und umgekehrt, u.v.a.m.

2) Was kann man damit anfangen?

Nix! Die An/Unzahl der Kräfte ist unhandlich und Kräftepaare, die sich per se aufheben, bieten keinen Ansatz für die Gleichgewichtsbedingungen.

3) Gesucht ist ein Verfahren, um die Kräftepaare zu reduzieren und aufzusprengen

→ Freimachen: Man entscheidet sich für eine BG und zieht einen symbolischen Kringsel darum. Reduktion: Alle Kräftepaare, die innerhalb oder außerhalb des Kringsels liegen, werden ignoriert. Fraktion: Von den Kräftepaaren, die an der Grenze der BG liegen bzw. von der Systemgrenze zerschnitten werden, betrachtet man nur die Kräfte, die von außen auf die BG wirken.



[Böge, Techn. Mechanik] einarbeiten,

Im Prinzip muss man nur die gesuchten Kräfte eintragen und hat schon einen Teil der Grenze der geeigneten Baugruppe. Auf die BG dürfen beliebig viele bekannte Kräfte wirken. Sonstige Kräfte möglich (Schule nur im Einzelfall), sie zählen aber zu den unbekanntem Kräfte.

Gewichts- und Reibungskräfte werden berücksichtigt, wenn es verlangt wird.

Vom freizumachenden Körper werden alle Berührstellen entfernt und durch die zugehörigen Kräfte ersetzt. Am Besten denkt man sich eine Linie um die gewählte Baugruppe und sucht alle Kräfte, die diese Linie überschreiten.

Schüler setzen Kräfte oft nach Wunschenken ein, z.B. "da brauche ich noch eine Kraft" oder auf Verdacht "Da bewegt sich was". Das führt zu vielen Fehlern.

Mit der Vorzeichenregel „Wie wirkt der Rest der Welt (RdW) auf die Baugruppe (BG)“ wirken Schwerkraft nach unten. Es käme auch zu richtigen Ergebnissen, trüge man ALLE Richtungen „falsch“ herum ein (Schwerkraft nach oben!), aber Mischen der Richtungssysteme funktioniert nie.

Bei zeichnerischen Lösungen muss man keine Richtungen für unbekannte Kräfte annehmen, es genügen die WL. Bei rechnerischen Lösungen sind die Richtungen nötig für die Vorzeichen in den Gleichungen. Wenn man eine Richtung „falsch“ angenommen hat, wird das Ergebnis negativ und es stimmt wieder.

Es sind nur 3 unbekannte Kräfte lösbar, weil nur drei Gleichgewichtsbedingungen existieren. Die Anzahl der lösbaren Unbekannten reduzieren sich, wenn nicht alle Gleichungen angewendet werden können, z.B. beim zentralen Kräftesystem (kein Momentengleichgewicht) oder wenn alle Kräfte parallel sind (Kräftegleichgewicht nur in einer Richtung). Wenn man mehr unbekannte Kräfte findet als lösbar sind, muss man weitere Informationen suchen. Ein Lösungsversuch ohne zusätzliche Infos ist sinnlos.

Das Freimachen ist oft der schwierigste Teil einer Statikaufgabe, deshalb gebe ich für eine lesbare LS bereits 1/4 bis 1/3 der Punkte. Umgekehrt gibt es ohne LS nie die volle Punktzahl. Lösungen in der Statik sind komplex und die Fehlerquote steigt stark an, wenn man wesentliche Lösungsschritte im Kopf jongliert → LS liegt im Eigeninteresse des Schülers.

Kein TA, nur beiläufig einließen lassen

Gemeinsame Wirkungslinie ist notwendig in der Definition, damit auch gebogenen Teile als Pendelstützen gesehen werden können. Die Form der Pendelstütze spielt keine Rolle.

Wenn die Reibung berücksichtigt werden muss, ist sie gegen die Bewegungsrichtung einzu tragen. Die Haftreibung $F_R = \mu \cdot F_N$ ist nicht die tatsächliche Reibkraft, sondern ihr höchster möglicher Wert. Deshalb ist die Reibkraft in aller Regel unbekannt.

Meist wird die Reibung vernachlässigt.

Für die Rollreibung im Ruhezustand gilt dasselbe wie für die Haftreibung oben.

Verschiebesatz: Wenn über eine Rolle ein Seil gelegt ist, das in beide Richtungen gleich stark zieht, spielt ihr Durchmesser „keine Rolle“.

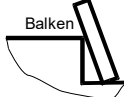
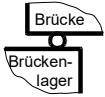


Lose und feste Lager

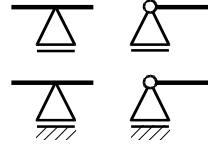
sind in allen Richtungen ($F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z$) außer einer, zwei, drei beweglich:

Einwertige Lager (Loslager)

sind in allen Richtungen außer einer beweglich.
konstruktive Beispiele



Symbole:

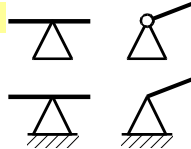


Richtung einer Drehung wird mit der Richtung der Drehachse angegeben. Da wir nur 2-D-Systeme betrachten, entfallen F_z, M_x und M_y , und Index z beim Moment.
Wenn die Reibung ausnahmsweise berücksichtigt wird, zählt diese als Stützkraft.

Ihre Wirklinie ist eindeutig bestimmt. (einwertige Stützkäfte bzw. Pendelstützen, Seil, usw.) sind beim Lösen von Aufgaben besonders wichtig.

Zweiwertige Lager (Festlager)

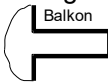
sind in allen Richtungen außer zweien beweglich.



FO Brückenlager

Dreiwertige Lager

sind in allen Richtungen fest.



Vertiefung

FTM, TG: AB Statik_Ub_Abi ([Böge Aufg.] Aufgabe 9..28 sind zu leicht)



Statik II: Allgemeines Kräftesystem

3-Kräfteverfahren

Anwendung:

3 nicht parallele Kräfte

Gesucht: 1x WL und 2x Betrag.

1 bekannte Kraft

+ 1 (un-)bekannte Kraft mit WL

+ 1 unbekannte Kraft ohne WL

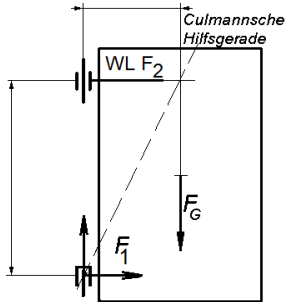
Arbeitsplan

0. Lageplanskizze

siehe Lageplan, im Lageplan kann man Schranie und Türe weglassen

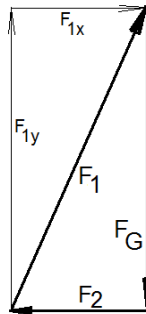
1. Lageplan

Türe $M_L = 10\text{cm}/2\text{m}$



2. Kräfteplan

$M_K = F_G / 10\text{cm}$



nur TGT

1) Welche Kräfte wirken auf die Scharniere der Klassenzimmertür

Schüler sollen die Kräfte in den Scharnieren einer Tür bestimmen. Maße schätzen oder mit Tafellineal messen.

2) Freimachen der Türe (Lageplan)

3) Der Lagemaßstab bringt die Abstände zwischen den Kräften in die Lösung

4) Kräfteplan

5) Anschließend Überschriften einsetzen.

Welche Kräfte wirken überhaupt ?

Die LP-Skizze ist ein Entwurf des LP und an keine Form gebunden. Sie ist keine Pflicht, aber empfehlenswert, denn beim Skizzieren kann man die Aufgabe erfassen ohne sich mit Formalien zu belasten. Ich gebe für eine verständliche Skizze ca. 1/4 der Punktzahl.

Schnittpunkt im LP = geschlossenes Polygon im KP

Lösungsgedanke

Das Türblatt muss seine Gewichtskraft auf eines (!) der beiden Scharniere (oben oder unten) senkrecht abstützen. Hier wurde das untere Scharnier gewählt, mit dem oberen funktioniert es sinngemäß. Die Kraft F_1 , mit der das untere Scharnier auf die Tür wirkt, ist in Betrag und Richtung zunächst unbekannt, dies wird im LP mit der Darstellung ihrer Komponenten F_{1x} und F_{1y} angedeutet. Wie alle Kräfte in der Statik darf man auch die beiden anderen Kräfte F_2 und F_3 auf ihren Wirklinien verschieben bis zu deren Schnittpunkt und dort durch ihre resultierende F_R ersetzen. Die Resultierende F_R und F_1 müssen sich aufheben (actio = reactio), weil sonst das Türblatt nicht im Gleichgewicht ist. Aufheben können sich die Resultierende und F_1 aber nur, wenn sie auf einer gemeinsamen Wirklinie liegen. Folglich bildet die Linie zwischen dem unteren Scharnier und dem Schnittpunkt aus F_3 und F_2 die Wirklinie von F_1 . Damit schneiden sich alle 3 Kräfte in einem Punkt und die Aufgabe kann mit den Mitteln der zentralen Statik gelöst werden.

Karl Culmann (*1821 - †1881) war Bauingenieur, Professor an der ETH Zürich und Verfasser von „Die graphische Statik“ (→ [Culmann 1866]).

Übungen

4-Kräfteverfahren

Anwendung:

4 Kräfte, alle WL bekannt, max. paarweise parallel

1 bekannte Kräfte

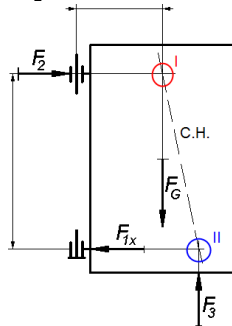
+ 3 (un-)bekannte Kräfte mit WL

Gesucht: 3x Betrag der Kraft

Arbeitsplan

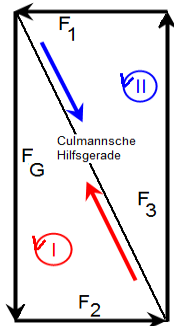
1. Lageplan

Türe $M_L = 10\text{cm}/2\text{m}$



2. Kräfteplan

$M_K = F_G / 10\text{cm}$



Die farbige Markierungen dienen der Erklärung und sind zur Lösung nicht erforderlich, auch nicht in s/w.

AB Statik_Ub_Abi:

1.1 HP94/95-2 Bohrmaschinenständer 1.1, 2.1 HP93/94-2 Zweigelenkarm, 3.1 HP95/96-1 Garagentransporter, 5.2 HP91/92-1 Parkkliff, 6.2 HP98/99-1 Lkw, [Böge Aufg.] Aufgaben 83ff "3-Kräfte-Verfahren"

AM Keil

1) Neue Situation: Die Türe wird mit einem Keil angehoben, bis die Angeln vom Gewicht der Türe entlastet sind.

Anwendung:

F_1 : Betrag und Richtung bekannt

F_2, F_3, F_4 : Betrag unbekannt, Richtung bekannt

2) 0. Lageplanskizze wird nicht mehr gesondert erwähnt

3) Keil außerhalb des Schwerpunktes ansetzen und vom Lageplan im 3-Kräfteverfahren ausgehen: die Schüler müssen selbst merken, dass die waagerechten Kräfte die Richtung tauschen.

Lösungsgedanke

Bei 4 Kräften, davon 3 Unbekannten, werden zwei Kräftepaare zusammengefasst und jeweils durch ihr F_R ersetzt. Damit dies momentenfrei gelingt, muss die Wirklinie jeder F_R durch den Schnittpunkt ihres Kräftepaars verlaufen. Damit sich die beiden F_R aufheben können, müssen sie eine gemeinsame Wirklinie haben, also durch die beiden Schnittpunkte der beiden Kräftepaare verlaufen (Culmannsche Hilfsgerade C.H.).

Man kann die Culmannsche Hilfsgerade als ein internes Kräftepaar (KP: roter und blauer Pfeil, actio und reactio) betrachten, das in den Schnittpunkten I und II (rot und blau) hilft, das Gleichgewicht zu halten, sich aber wie jedes interne Kräftepaar selbst aufhebt. Da C.H. bei der Türe eine Druckkraft ist, können könnte man die Tür rechtwinklig zur C.H. durchsägen (Vergleiche [EuroRBM] Aufgabe "Keilspanner").

Hinweise zur Konstruktion

Man beginnt mit dem Schnittpunkt I (roter Kreis), weil dort die bekannte Kraft (FG) liegt, und zerlegt im KP die Kraft FG in die Kraft F2 und die gedachte Kraft C.H. mithilfe ihrer Wirklinien. Es ergibt sich das Kräftedreieck links unten (roter Kreis).

Jetzt kennt man auch im Schnittpunkt II (blauer Kreis) eine Kraft, nämlich die gedachte Kraft C.H., die man in die Kräfte F1 und F3 zerlegt.

Genau gedacht ist C.H. ein internes Kräftepaar, das in einem Schnittpunkt entgegengesetzt zum anderen wirkt (roter und blauer Pfeil). Man erkennt, dass dadurch im KP für jeden Schnittpunkt ein geschlossenes Kräftedreieck entsteht und sich gleichzeitig das gedachte interne Kräftepaar C.H. wieder aufhebt, wie es sich für ein bloßes Hilfsmittel zur Konstruktion des Kräfteplanes gehört.

Übungen

AB Statik_Ub_Abi:

7.1 HP1998/99-2 Zugmaschine mit Anhänger, 5.1 HP1991/92-1 Parkkliff (Bremskraft und Aufstandskraft getrennt betrachten), 9.1 HP1992/93-1 Mountainbike (Gewichtskraft des Rades vernachlässigen). HP1986/87-2 Stirnkipper. Hinweis: 4-Kräfte-Aufgaben sind selten! [Böge Aufg.] Aufgaben 117ff "4-Kräfte-Verfahren"

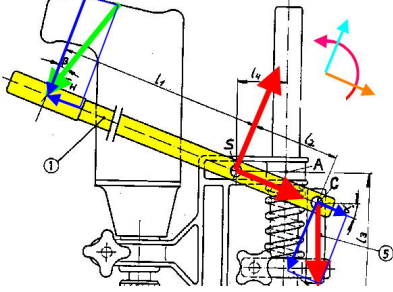


Auflagerkräfte in der Ebene berechnen

Das grafische Schlusslinienverfahren löst Aufgaben mit komplizierter Bemaßung leichter (→ HP 98/99-2 Zugmaschine mit Anhänger), steht aber nicht mehr im Lehrplan. rechnerische Verfahren sind flexibler, z.B. "Ab welchem .. kippt.."
[Skolaut 2014] S.26: „Statisches Gleichgewicht am ebenen starren Körper“ → die Einschränkungen statisch, eben und starr erfolgen schon bei der Einführung.

TG: HP 94/95-1 Bohrmaschinenständer

Lageskizze Hebel



Im Beispiel kann der Drehpunkt in den Bolzen S oder C liegen. Hier wird S gewählt, da von dort die Bemaßung ausgeht und dies die Rechnung ein wenig erleichtert.

$$\sum M_S = 0$$

$$= 0 = F_{Hy} \cdot l_1 - F_{Cy} \cdot l_2 \rightarrow$$

$$F_C = F_{Hy} \cdot \frac{l_1}{l_2 \cdot \cos \alpha} = 98,48 \text{ N} \cdot \frac{300 \text{ mm}}{90 \text{ mm} \cdot \cos 20^\circ}$$

$$F_C = 349,3 \text{ N}$$

4) Hebelarme und Drehrichtung vertiefen

Das Vorzeichen ist positiv, wenn ein Moment in der Richtung des Koordinatensystems (siehe rotes Symbol) wirkt.

Im Beispiel bekommt man den Hebelarm zu F_H , zwar noch relativ leicht, aber ich will das übertragbare Verfahren zeigen.

$$F_{Hx} = F_H \cdot \sin \beta = 100 \text{ N} \cdot \sin 10^\circ = 17,36 \text{ N}$$

$$F_{Hy} = F_H \cdot \cos \beta = 100 \text{ N} \cdot \cos 10^\circ = 98,48 \text{ N}$$

5) Sorgfältig auf die Vorzeichen ein gehen. Jede der 3 GG-Bedingungen gehört zu einer der 3 Koordinatenrichtungen.

$$\sum F_x = 0$$

$$= 0 = -F_{Hx} + F_{Sx} + F_{Cx} \rightarrow$$

$$F_{Sx} = F_{Hx} - F_{Cx} \sin \alpha$$

$$F_{Sx} = 98,48 \text{ N} - 349,3 \text{ N} \cdot \sin 20^\circ = -102,1 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$= 0 = -F_{Hy} + F_{Sy} - F_{Cy} \rightarrow$$

$$F_{Sy} = F_{Hy} + F_{Cy} \cdot \cos \alpha$$

$$= 17,36 + 349,3 \text{ N} \cdot \cos 20^\circ$$

$$F_{Sy} = 426,7 \text{ N}$$

Wenn es ein Festlager gibt:

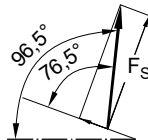
$$F_S = \sqrt{F_{Sx}^2 + F_{Sy}^2} = \sqrt{(-102,1 \text{ N})^2 + (426,7 \text{ N})^2}$$

$$F_S = 438,7 \text{ N}$$

$$\gamma_S = \arctan \frac{F_{Sy}}{F_{Sx}}$$

$$= \arctan \frac{426,7 \text{ N}}{-102,1 \text{ N}}$$

$$= -76,5^\circ$$



Vertiefung

Arbeitsplan

1. Freimachen + Lageskizze erstellen

- Baugruppe wählen (s.o.) und benennen
- alle Kräfte eintragen (s.o.)

2. Richtungen für unbekannte Kräfte annehmen (s.o.)

- für das Vorzeichen in Rechnungen
- „falsche“ Annahme → negatives Ergebnis → stimmt wieder!
- für zweiwertige Lager 2 Richtungen eintragen (z.B. F_x, F_y)

3. Gleichgewichtsbedingungen ansetzen + Gleichungssystem lösen

$$\sum M = 0 \quad \sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$

mögliche Vereinfachungen

4. Momentengleichgewicht $\sum M = 0$

- Drehpunkt im Schnittpunkt zweier unbekannter Kräfte

→ eine Gleichung mit 1 Unbekannten = sofort lösbar.

- Moment = Kraft · Hebelarm

(Kraft \perp Hebelarm)

Der Hebelarm ist der kürzeste Abstand zw. Drehpunkt und Wirklinie

5 Kräfte in Bemaßungsrichtung zerlegen

- Nicht Hebelarme berechnen,
- sondern Kräfte rechtwinklig zur Bemaßung zerlegen

- Hilfe: Koordinatensystem in Richtung der Bemaßung legen

- Man kann für jede Kraft ein eigenes Koordinatensystem wählen, z.B. Aufg.4: Hebebühne

- im tatsächlichen Angriffspunkt →

6. Kräftegleichgewichte $\sum F_x = 0$ und $\sum F_y = 0$

- beliebige Reihenfolge

$\sum F_x = 0$: In Kräftegleichgewichten gibt es keine Hebelarme. Das Vorzeichen ist positiv, wenn eine Kraft in Richtung der x-Achse des Koordinatensystems (siehe oranges Symbol) wirkt.

$\sum F_y = 0$: Das Vorzeichen ist positiv, wenn eine Kraft in Richtung der y-Achse des Koordinatensystems (blau) wirkt.

7. ggf. zusätzliche Gleichungen

- Für jede Unbekannte eine Gldg.

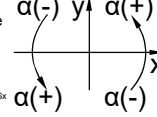
- im Abi selten, z.B. HP1983/84-2 Hebestation

8. Gleichungssystem lösen

- per Hand oder CAS

9. Betrag und Richtung ermitteln

Achtung: arctan ergibt kein eindeutiges Ergebnis für α (Zählrichtung von α siehe rechts), deshalb muss man den Winkel mit einer Skizze deutlich machen.



Dazu skizziert man die Komponenten F_{Sx} ($\approx -100\text{N}$) und F_{Sy} ($\approx +400\text{N}$) in das gewählte Koordinatensystem und überlegt dann, wo der berechnete Winkel liegt.

10. Plausibilität prüfen

Kompliziertere Aufgaben:
tgm HP1983/84-2 Hebestation
tgm NP201112-5 Salzklappe

- Für alle Probleme der Statik ist Freimachen unverzichtbar. Zur Dokumentation genügt eine unmaßstäbliche Skizze.
- Details siehe Unterrichtseinheit "Freimachen"
- Ich lege Wert darauf, dass die gewählte Baugruppe benannt wird, a) damit ich weiß, welche BG eine Schülerin meint, und b) damit sie es auch weiß :-)
- Details siehe Unterrichtseinheit "Freimachen"
- Man muss die Richtungen nicht kennen, sondern nur annehmen und kennzeichnen. Wenn die Richtung "falsch" angenommen wurde, wird das Ergebnis der Rechnung negativ und stimmt wieder. Es ist auch nicht sinnvoll, die "falsche" Richtungen nachträglich zu korrigieren, weil man dabei die ganze Rechnung korrigieren müsste. Wer sicher gehen will, vermerkt am negativen Ergebnis: „Kraft wirkt entgegen der Annahme.“
- In zweiwertigen Lagern (=Festlager) trägt man für unbekannte Kräfte die Komponenten in x- und y-Richtung ein.

Tipp 1: Wahl des Drehpunktes

Idee: Wenn man den Drehpunkt für die Gleichung $\sum M = 0$ im Schnittpunkt zweier unbekannter Kräfte wählt, haben diese Kräfte den Hebelarm 0 und fallen aus der Gleichung. Es bleibt also nur 1 Unbekannte → manuell leicht zu lösen?

Mit CAS ist dieser Schritt verzichtbar.

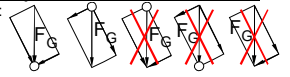
Sonstiges: Einen solchen Schnittpunkt gibt es immer, da Aufgaben mit 3 parallelen unbekannteren Kräften nicht lösbar sind. Bisher waren in den Abi-Aufgaben diese Schnittpunkte immer bemaßt. Wenn dies nicht Fall sein sollte (z.B. [Böge Aufg.] Aufg. 120; 129.), muss man die Maße zum Schnittpunkt ermitteln oder das Gleichungssystem individuell lösen. Nicht von Kraft mal Länge o.s.ä. reden, da dies leicht mit der Arbeit verwechselt wird, aber dort sind Kraft und Weg parallel.

Tipp 2: Komponenten statt Hebelarm

Idee: Zur Berechnung der Momente müssen Kraft und Hebelarme rechtwinklig zueinander stehen. Wenn dies durch die Bemaßung nicht gegeben ist, können die Hebelarme zwar berechnet werden, aber das funktioniert in jeder Aufgabe anders, ist deshalb fehleranfällig und nur in einfachen Fällen sinnvoll. Meist ist es einfacher, die Kräfte in Bemaßungsrichtung zu zerlegen und die Komponenten mit den gegebenen Längen zu multiplizieren – das Verfahren funktioniert immer gleich und kann eingeübt werden. Zwanglos funktioniert es, wenn man das Koordinatensystem in Bemaßungsrichtung legt.

Tipp 3: Kraftkomponenten skizzieren

Es sind oft Kleinigkeiten:



Kräfte im Angriffspunkt zerlegen, damit man die Hebelarme, nicht verwechselt

Man könnte noch einmal $\sum M = 0$ mit einem anderem Drehpunkt ansetzen, aber $\sum F = 0$ ist weniger aufwändig.

Vorzeichenregel: Es bekommen die Kräfte ein negatives Vorzeichen, deren angenommen Richtung entgegen den Koordinatenrichtungen x bzw. y wirken. Achtung: Diese Vorzeichen sind nicht die Vorzeichen des Momentengleichgewichts.

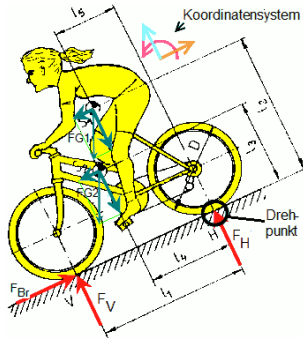
Plausibilität: Ist es plausibel, dass in F_x und F_s ca. 4x größer als F_H sind?

2 [Müller-Breslau I] S.211: „Denn wählt man den Schnittpunkt von irgend zweien der drei Spannkraften zum Drehpunkte und setzt die Summe der statischen Momente sämtlicher Kräfte gleich Null, so erhält man eine Gleichung, in der nur eine unbekannte Spannkraft vorkommt, weil die statischen Momente der durch den Drehpunkt gehenden Spannkraften gleich Null sind.“



Übungen

Beispiel: schiefe Ebene
z.B. HP 92/93-1 Mountainbike
Lageskizze Rad+Fahrerin



(Dreh-)Moment = Kraft · Hebelarm (Kraft ⊥ Hebelarm)
Das Vorzeichen ist positiv, wenn ein Moment in der Richtung des Koordinatensystems (siehe rotes Symbol) wirkt.

$$\begin{aligned}
&= \pm F_{Br} \cdot 0 - F_V \cdot l_1 \pm F_H \cdot 0 \\
&\quad + F_{G1x} \cdot l_2 + F_{G1y} \cdot l_5 + F_{G2x} \cdot l_3 + F_{G2y} \cdot l_4 \rightarrow \\
F_V &= \frac{F_{G1x} \cdot l_2 + F_{G1y} \cdot l_5 + F_{G2x} \cdot l_3 + F_{G2y} \cdot l_4}{l_1} \\
F_V &= \frac{+151,0 \cdot 1000 + 539,3 \cdot 426}{1044} \frac{N \cdot mm}{mm} \\
F_V &= 462 N
\end{aligned}$$

In Kräftegleichgewichten gibt es keine Hebelarme.
Das Vorzeichen ist positiv, wenn eine Kraft in Richtung der x-Achse des Koordinatensystems (siehe oranges Symbol) wirkt.

Das Vorzeichen ist positiv, wenn eine Kraft in Richtung der y-Achse des Koordinatensystems (siehe blaues Symbol) wirkt.

Beispiel: mit Zusammensetzen

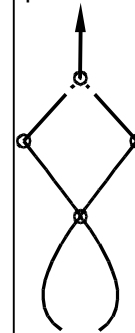
Beispiel: HP 83/84-2 Hebestation
Beispiel Kippaufgabe

FTM

72-82: Resultierende mit Abstand weglassen
83-97: Lagerkräfte (einstufig)
98ff Lagerkräfte (mehrstufig)

Warum Algorithmen? Die Stärke des Menschen ist es eigentlich, sich auf **neue** Probleme einzustellen, während wiederkehrende Spezialaufgaben wie Fliegen fangen besser von Fröschen beherrscht werden [Ganten 2003]. Das sollte auch Schule fördern, also Vielseitigkeit verlangen statt stumpfingiger Tätigkeiten. Dem gegenüber steht, dass Ingenieure meist Standardprobleme mit Standardmethoden bearbeiten. Und Schüler können in einer 4,5-stündigen Abi-Prüfung nicht dauernd hochkonzentriert arbeiten und brauchen Lösungsmethoden, die eine reduzierte Hirnleistung vertragen: Also doch Algorithmen.

Sprezzange zum Heben von Steinquadern





Schlusslinienverfahren (Auflager zeichnerisch ermitteln)

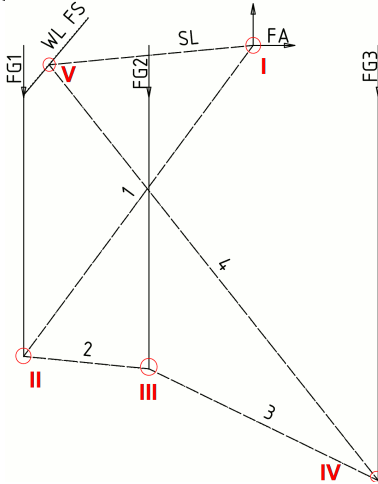
TG: nicht mehr; FTM, MVK: nein
Ausführliche Darstellung siehe folgende Seiten.

Anwendung

Gegeben: Beliebige Anzahl auch paralleler Kräfte
Gesucht: 1x Kraft (Betrag + WL)
+ 1x Betrag (WL bekannt)

Beispiel: HP 97/98-1 Verladeanlage

Lageplan Brücke $M_L = 1\text{m} / 10\text{mm}$



Arbeitsplan

1. Lageplan
2. Kräfteplan
– bekannte Kräfte addieren
3. KP: Anschluss der unbekannt Kräfte festlegen
4. KP: Pol P wählen
– Polstrahlen möglichst rechtwinklig zu den Kräften
5. KP: Polstrahlen einzeichnen und fortlaufend nummerieren
– beginnend im zweiwertigen Lager

Zuvor Lageplanskizze, dann Lageplan mit Wirklinien der gegebenen Kräfte zeichnen.

Es empfiehlt sich, die Kräfte im Kräfteplan in einer Reihenfolge zu zeichnen, die dem Lageplan entspricht (z.B. Kräfte im LP von links nach rechts). Dies verringert kreuzende Seilstrahlen.

Bisher alles wie gehabt.

Die Kraft F_A kann oben im KP anschließen und F_S unten oder umgekehrt, aber damit es später nicht zu Verwechslungen kommt, ist es wichtig, sich festzulegen und dies auch im KP einzutragen. Danach trägt man auch die WL von F_S ein.

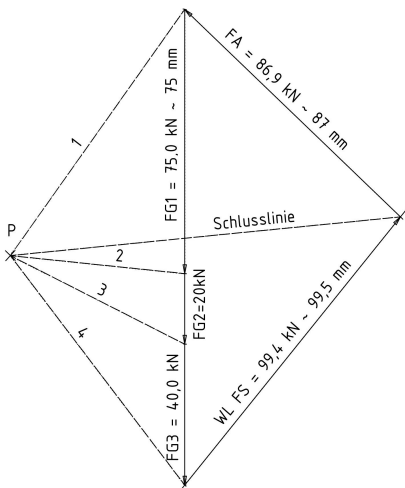
Die Polstrahlen sollen möglichst rechtwinklig zu den Kräften stehen, da sonst die Seilstrahlen wegen der spitzen Winkel leicht außer Kontrolle geraten und das Blatt verlassen. In diesem Fall ist es die zweckmäßigste Lösung, weitere Blätter anzukleben. Andere Lösungen kosten mehr Zeit.

Man kann auch die Maßstäbe klein wählen, aber das verringert die Genauigkeit.

Beginn im zweiwertigen Lager (hier F_A), weil das Lager der einzige bekannte Punkt seiner Wirklinie ist. Beginnt man nicht in F_A , wird man es nicht mehr treffen. Wenn kein zweiwertiges Lager vorhanden ist, kann man beliebig beginnen.

Fortlaufend nummerieren richtet sich nach dem Verlauf der Kräfte, s.u. → "Bildergeschichte" Schritt 8. Eigentlich ist die Bezeichnung der Polstrahlen gleichgültig, aber wenn man sie durcheinander nummeriert, verliert man leicht den Überblick. Der Polstrahl zwischen F_A und F_S kann noch nicht eingezeichnet werden

Kräfteplan $M_k = 10\text{ kN} / 10\text{ mm}$



6. LP: Seilstrahlen übertragen

Korrespondierend zu Polstrahlen

- parallel
- zwischen die gleichen Kräfte
- fortlaufend
- gleiche Nummerierung

Parallelverschiebung!

Aus einem Polstrahl zwischen den Kräften A und B wird ein Seilstrahl zwischen den Wirklinien der Kräfte A und B. Auf einanderfolgende Seilstrahlen kreuzen sich auf den Wirklinien der Kräfte, die von den entsprechenden Polstrahlen eingeschlossen sind. Alle Seilstrahlen müssen zusammen mit der Schlusslinie ein Polygon ergeben.

Schnittpunkte mit den WL zur besseren Übersichtlichkeit einzeichnen und mit römischen Ziffern nummerieren (hier nicht dargestellt), Seilstrahlen bekommen die Nummern ihrer korrespondierenden Polstrahlen

7. LP: Schlusslinie eintragen

SL schließt die Seilstrahlen

8. KP: Schlusslinie übertragen

Schnittpunkt SL / bekannte WL ist der letzte gesuchte Kraftknoten im KP

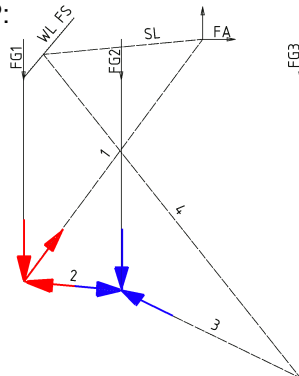
9. KP vervollständigen

Lösungsgedanke

Ist wie bei allen grafischen Verfahren:

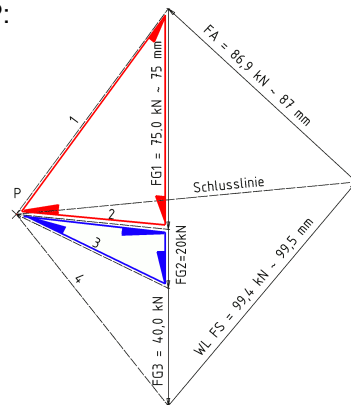
Kräfte, die im LP auf einen Punkt wirken, ergeben im KP ein geschlossenes Vieleck

LP:

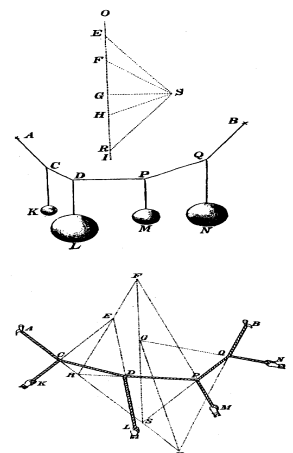


Seil-/Polstrahlen können als interne Kräfte interpretiert werden, die sich wieder aufheben. Kräfte, die im Lageplan auf einen Punkt wirken, ergeben im Kräfteplan ein Vieleck, wobei die Pol-/Seilstrahlen doppelt, aber entgegengesetzt wirken und sich dadurch aufheben (Beispiel Polstrahl 2 in rot und blau).

KP:



Seil- und Kräftepolygon nach Pierre Varignon (1654 - 1722) aus seinem Buch *Nouvelle Mécanique ou Statique* (1725). Solche Überlegungen wurden beim Bau von Brücken eingesetzt. Aus [Kurrer 2002] FO Seilpolygon

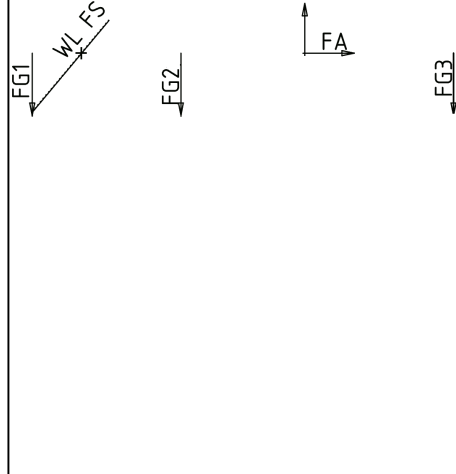




Schlusslinienverfahren in Bildern

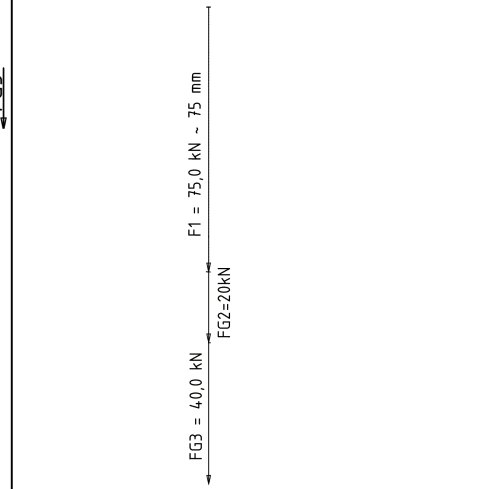
1) LP $M_L = 1\text{ m} / 10\text{ mm}$

Wie bei allen zeichnerischen Verfahren wird ein Lageplan erstellt. Die Abstände zwischen den Kraftangriffspunkten müssen (Lage-)maßstabstreu eingezeichnet werden, damit die Wirkung der Momente richtig in die Lösung einfließt. Wirkinien WL werden richtungstreu eingezeichnet. Zweiwertige Lager (F_A ohne Wirkinie) können mit einem Koordinatenkreuz gekennzeichnet werden. Die Länge der Kraftlinien spielt keine Rolle.

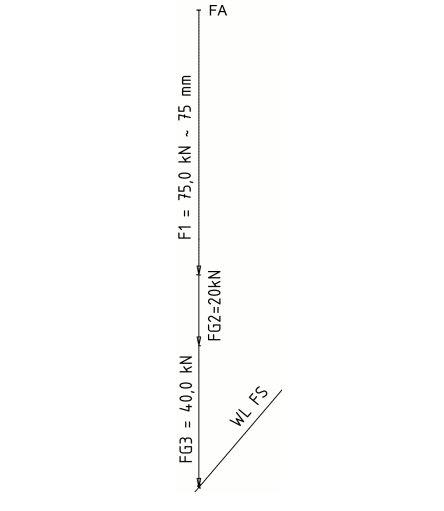


2) KP $M_k = 10\text{ kN} / 10\text{ mm}$

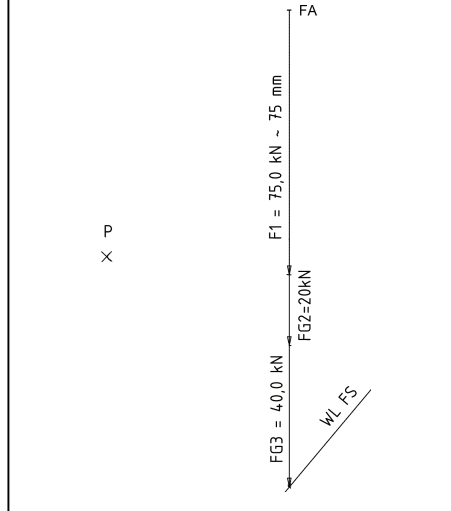
Wie bei allen zeichnerischen Verfahren werden im Kräfteplan zunächst die bekannten Kräfte maßstabstreu hintereinander gekettet. Die Reihenfolge ist beliebig, aber wenn man eine Reihenfolge von links nach rechts oder umgekehrt einhält, gibt es später weniger Durcheinander bei den Seilstrahlen (Schritt 15).



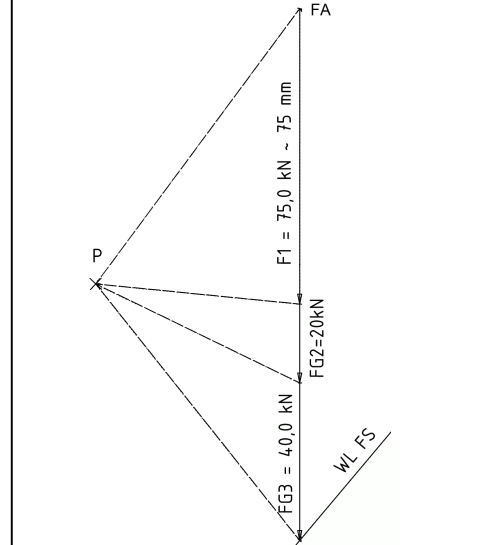
3) KP: Die Kraft F_A kann man oben oder unten an die vorhandene Kraftkette anschließen, aber man muss sich festlegen. Ebenso markiert man vorhandene Wirkinien unbekannter Kräfte und bezeichnet sie.



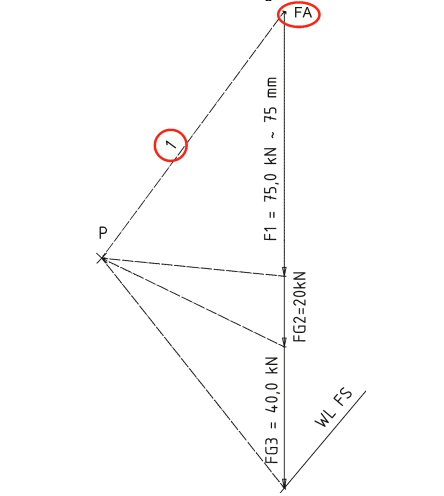
4) KP: Neben den KP zeichnet man ein beliebiges Pol P ein. Wenn der Pol P so liegt, dass die Polstrahlen möglichst winklig zu den Kräften verlaufen (Schritt 5), verringert man spätere Probleme mit dem Platzbedarf.



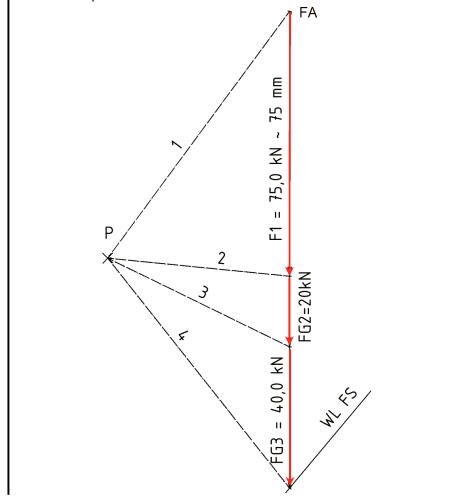
5) KP: Zwischen den Pol und die Verbindungsstellen von je 2 Kräften zeichnet man die Polstrahlen ein.



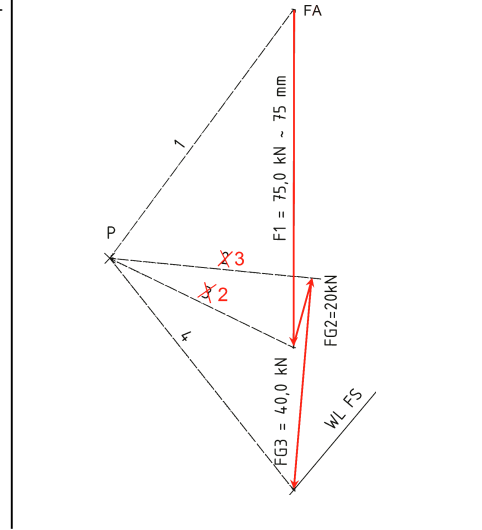
6) KP: Die Polstrahlen werden nummeriert, beginnend im zweiwertigen Lager (Festlager) (Begründung → Schritt 11). Wenn kein zweiwertiges Lager vorhanden ist, kann man an jedem Ende der vorhandenen Kraftkette beginnen.



7) KP: Die Polstrahlen werden fortlaufend nummeriert, wobei fortlaufend nicht einfach von oben nach unten bedeutet, sondern sich nach der Reihenfolge der Kräfte richtet (Beispiel siehe Schritt 8).

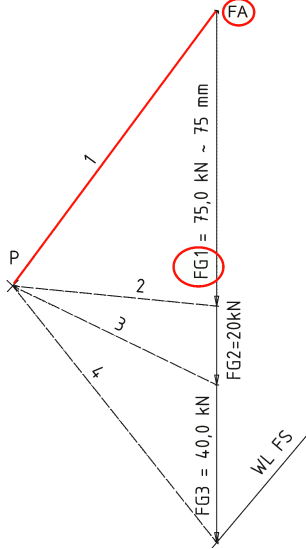


8) KP (Eingeschobenes Bild): Wenn die Kräfte hin und her verlaufen, müsste die Nummerierung der Polstrahlen folgen.

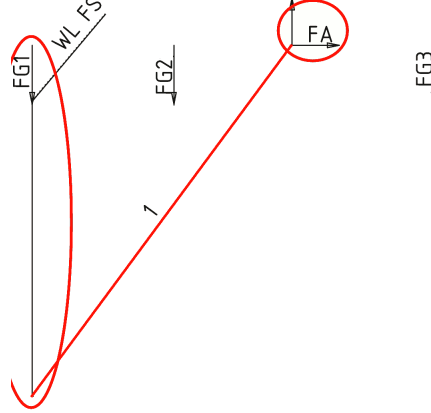




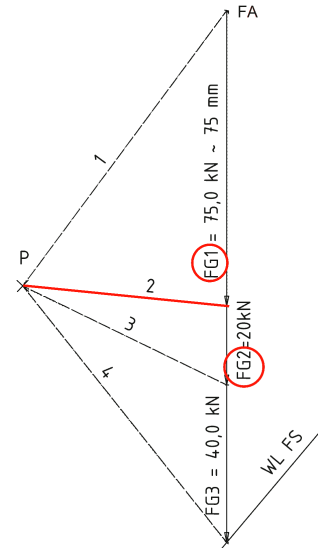
9) KP Polstrahl 1 bildet einen Schnittpunkt mit F_A und F_{G1}



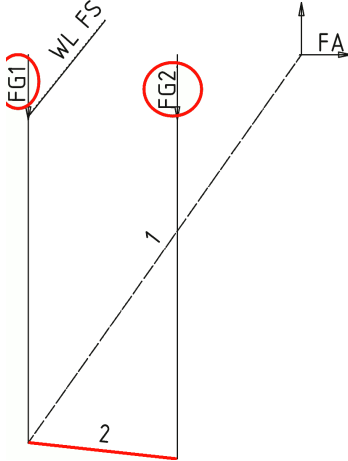
10) LP: Der Polstrahl 1 wird parallel verschoben in den Lageplan und bildet dort den Seilstrahl 1. Er verläuft zwischen den Wirklinien der gleichen Kräfte wie im Kräfteplan, in diesem Fall zwischen der Wirklinie von F_A und der Wirklinie von F_{G1} . Hier wird auch deutlich, warum man im zweiwertigen Lager A beginnen muss: Von der Wirklinie von FA ist nur ein Punkt (im Lager A) bekannt, und wenn man nicht dort beginnt, wird man die Wirklinie von F_A später nicht mehr treffen.



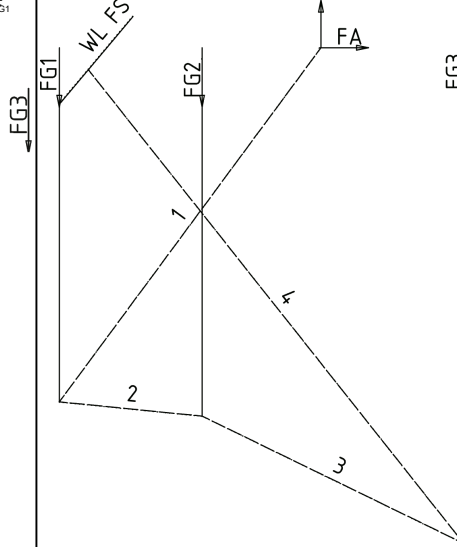
11) KP: Polstrahl 2 bildet einen Schnittpunkt mit F_{G1} und F_{G2}



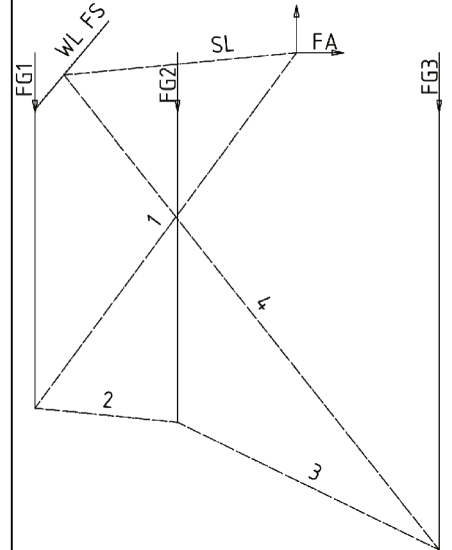
12) LP: Seilstrahl 2 schließt sich an Seilstrahl 1 an, verläuft parallel zum Polstrahl 2 und verbindet die Wirklinien von F_{G1} und F_{G2} .



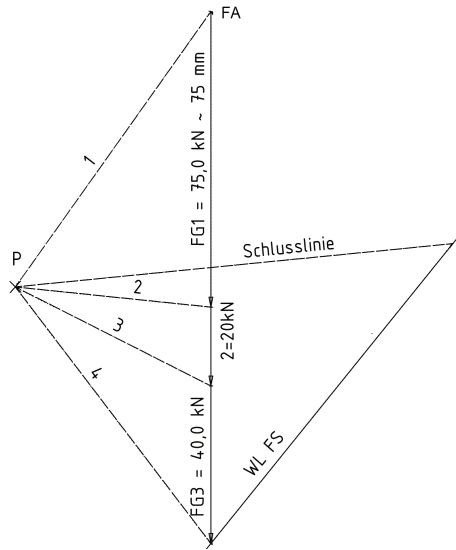
13) LP Seilstrahlen 3 und 4 ergänzt.



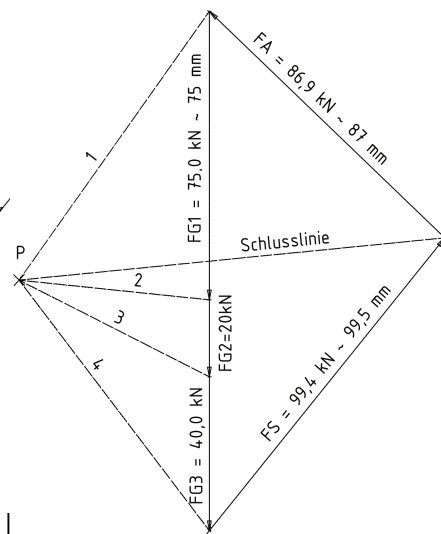
14) LP: Schlusslinie SL eintragen. Die Schlusslinie schließt den Kreis der Seilstrahlen.



15) KP: Schlusslinie aus dem LP übertragen. Die Schlusslinie im KP verläuft parallel zur Schlusslinie im Lageplan vom Pol P bis zur Wirklinie von F_S .



16) KP vervollständigen. Der Schnittpunkt zwischen der Schlusslinie und der bekannten Wirklinie F_S ist der letzte gesuchte Kraftknoten. Die Richtung der gesuchte Kräfte muss gleichsinnig mit den bekannten Kräften wirken.



Hinweise:
Die Zeichnungen wurden mit einem CAD-Programm erstellt, von Hand ist die angegebene Genauigkeit nicht erreichbar. Aber mehr als 5% Abweichung sollten es bei diesem vereinfachten Plan nicht sein. Wenn spitze Winkel und lange Linien ins Spiel kommen, kann es etwas mehr werden.



Schlusslinienverfahren bei 3 gesuchten Beträgen lösbar bei 2 parallelen WL sind → Fz auf schiefer Ebene

TG: nicht mehr; FTM, MVK: nein

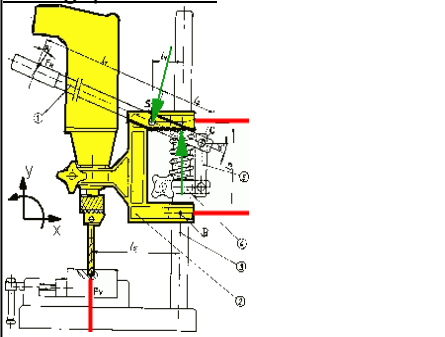
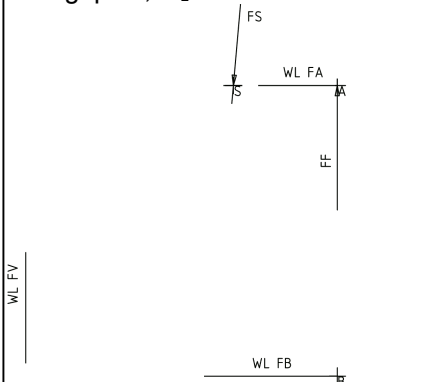
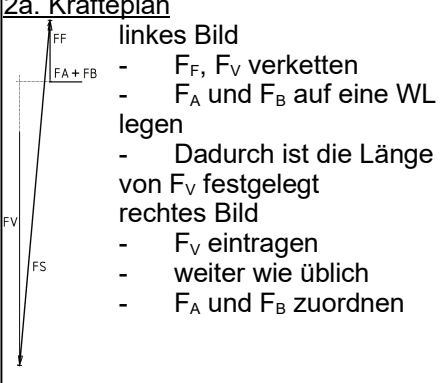
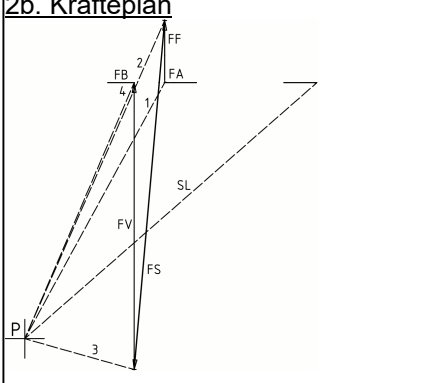
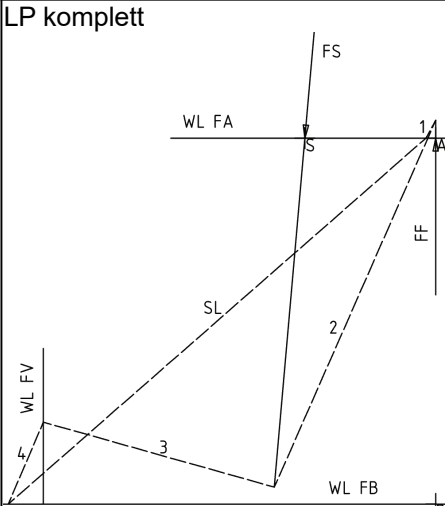
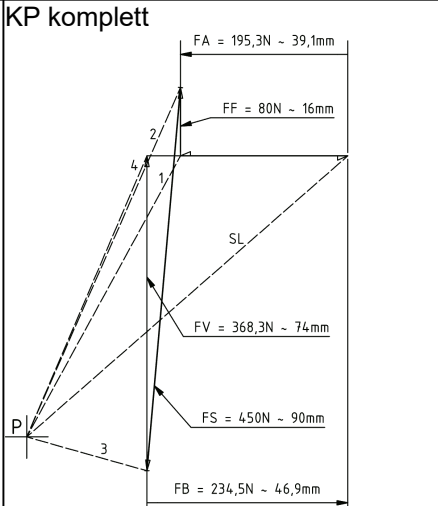
Auch wenn es kein reinrassiges Schlusslinienverfahren ist, lässt sich dieser Aufgabentyp, der im Abi gelegentlich auftritt, zwanglos mit dem Schlusslinienverfahren lösen, solange zwei der gesuchten Kräfte parallel sind – und das waren sie bisher im Abi.

Anwendung

Gegeben: Beliebige Anzahl auch paralleler Kräfte
 3 WL (davon 2 parallel) ohne Beträge
 Gesucht: 3x Beträge von Kräften

Wenn 3 Beträge gesucht sind, deren Wirklinien nicht parallel sind, ist das Schlusslinienverfahren nicht mehr geeignet. In diesem Fall kann man die bekannten Kräfte mit dem ähnlichen Seileckverfahren zu einer resultierenden Kraft zusammenfassen und diese dann mit dem Vierkräfte-Verfahren wieder zerlegen (siehe unten: "kombinierte Verfahren"). Aufgaben dieses Typs sind meines Wissen bisher noch nicht im Abi (TG Baden-Württemberg) vorgekommen, aber vom Lehrplan her kann man sie nicht ausschließen.

Typisch bei Fahrzeugen auf schiefer Ebene.

Beispiel: HP94/95-1 Bohrmaschine..	Besonderheiten bei 3 WL
<p>0. Lageplanskizze</p> 	<p>1. Lageplan, $M_L = 100N/20mm$</p> 
<p>2a. Kräfteplan</p> <p>linkes Bild - F_F, F_V verketten - F_A und F_B auf eine WL legen - Dadurch ist die Länge von F_V festgelegt rechtes Bild - F_V eintragen - weiter wie üblich - F_A und F_B zuordnen</p> 	<p>2b. Kräfteplan</p> 
<p>LP komplett</p> 	<p>KP komplett</p>  <p> $FA = 195,3N \sim 39,1mm$ $FF = 80N \sim 16mm$ $FV = 368,3N \sim 74mm$ $FS = 450N \sim 90mm$ $FB = 234,5N \sim 46,9mm$ </p>

Lageplanskizze, (Lage-)maßstabsgetreuer Lageplan und der Kräfteplan bis zum Punkt "Alle bekannten Kräfte verketten.." ist bei allen zeichnerischen Verfahren gleich.

Die roten Linien in der Lageplanskizze sollen die Wirklinien der gesuchten Kräfte darstellen. Eine Richtungsangabe ist für sie nicht erforderlich, das wäre in dem Fall auch ziemlich schwierig. Die Richtungen ergeben sich im Verlauf der Lösung.

Nachdem man die bekannten Kräfte F_F und F_S verketten hat, fasst man die parallelen Kräfte F_A und F_B auf einer Wirklinie zusammen und erkennt, dass es für F_V nur noch eine Möglichkeit gibt, nämlich bis zur Verlängerung der gemeinsamen Wirklinie von F_A und F_V . Somit ist F_V bekannt und man kann wie üblich weiter machen.

D.h. man legt fest, wo F_A und F_B am neuen Kräfteplan anschließen, zeichnet die Polstrahlen usw. Man beachte Nummerierung der Polstrahlen in der Reihenfolge der zugehörigen Kräfte.

Die Schlusslinie zeigt dann an, wo F_B aufhört und F_A anfängt

Im fertigen Kräfteplan verlaufen die Kräfte F_A und F_B teilweise auf der gleichen Linie. F_B wirkt nach rechts und F_A nach links, sodass der Kräftezug geschlossen ist.

Vertiefung

Ub Statik Abi 9.1) HP92/93-1 Mountainbike



Seileckverfahren

nur TG:

Ültg: Neu im Lehrplan, bisher nicht dran gekommen, sehr ähnlich zum SLV

Anwendung

Bestimmung einer Resultierenden aus beliebigen Kräften

Gegeben: beliebig

Gesucht: 1x Kraft (Betrag + Richtung + Lage WL)

Prinzip

ähnlich wie Schlusslinienverfahren

gesucht wird eine (!) Kraft und die Lage ihrer Wirklinie

– alle Polstrahlen sind bekannt, deshalb gibt es keine Schlusslinie

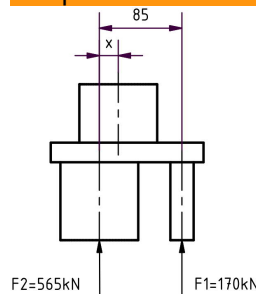
– Betrag und Richtung der einzig fehlenden Kraft ergibt sich im Kräfteplan

– Die Lage der WL der gesuchten Kraft ergibt sich im LP aus dem Schnittpunkt der letzten beiden Seilstrahlen

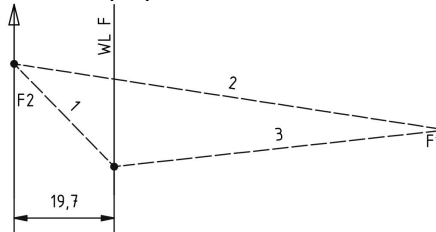
HP 85/86-2 Kurbelpresse Aufg.2

Die beiden Stempel unter der Stempelplatte werden mit den Kräften laut Zeichnung belastet.
Gesucht ist das Maß x, damit der obere Zapfen die beiden Kräfte ohne Biegemoment aufnehmen kann.

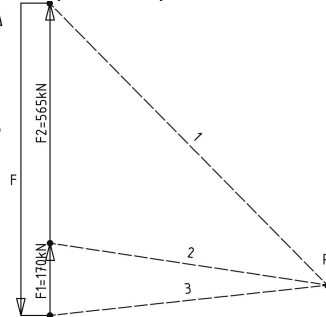
Beispiel



LP Stempelplatte



KP (F=735N)



Kombination aus SEV und 4KV

Alternativ: 2 Kräfte zu einem zweiwertigen Lager zusammenfassen

Ültg:

Wie löst man das Beispiel (links unten) grafisch, wenn das Vorderrad schon auf einer waagerechten Ebene steht?

Anwendung

Wenn für das 4KV zu viele Kräfte mitspielen und das SLV mit 3 gesuchten Beträgen nicht greift, weil die WL der gesuchten Kräfte nicht parallel sind.

Trat bisher im Abi nicht auf, ist aber vom Lehrplan her nicht völlig auszuschließen.
FO erstellen

Beispiel: HP92/93-1 Mountainbike

(Änderung: Vorderrad auf einer waagerechten Ebene)

Arbeitsplan

Kräfte mit SEV zusammenfassen

Resultierende mit 4KV zerlegen

Vertiefung

NP 1998/99-2 Geländewagen Aufgabe 1 (Änderung: zusätzliche Masse im Fahrzeug, z.B. Ladung)



Nicht unterrichten

Zusammenhang zw.

Kraft und Beschleunigung

Die 3 Prinzipien Trägheit, Aktion und Reaktion entsprechen den 3 Newtonschen Axiomen [Tipler 1995]. Das 1. Axiom wurde schon von Galilei gefunden [Böge, Techn. Mechanik].

Newton 1: Trägheitsprinzip

(1. Newton'sches Axiom) Das Trägheitsgesetz meint den Zustand ohne zusätzliche Kräfte, bei dem ein Körper träge in seinem Bewegungszustand verharrt [1].
Sir Isaac Newton (*1642 - †1726) war einer der bedeutendsten Wissenschaftler.
Der Zusammenhang wurde schon 1638 von Galilei formuliert → [Gross 2015] S.36

Ohne Kraft keine Bewegungsänderung (= Trägheit)

↔ Bewegungsänderung benötigt Kraft

Bewegungsänderung = Beschleunigung

- = Beschleunigen (umgangssprachlich)
- = Bremsen (= negative Beschleunigung)
- = Kurvenfahren (= Fliehkraft, Querbeschl.)

Newton 2: Aktionsprinzip

(oder dynamisches Grundgesetz)

(2. Newton'sches Axiom): Je größer die Masse und je größer die Beschleunigung ist, desto größer ist die (result.) Kraft und umgekehrt:

Gewichtskraft

Die Erde beschleunigt alle Körper gleich

Gewichtskraft

Erdbeschleunigung, Ortsvektor

das bedeutet:

bzw.

Newton 3: Reaktionsprinzip

(=Wechselwirkungsgesetz, actio = reactio)

(3. Newton'sches Axiom)

Kräfte treten immer paarweise auf (Kraft + Gegenkraft)

[Gross 2015]: Zu jeder Kraft gibt es stets eine entgegengesetzt gerichtete gleich große Gegenkraft.

Überlegungen zum Freimachen – hier nicht unterrichten

Da sich Kräftepaare immer aufheben, d.h. in der Summe 0 ergeben, bringt es nichts, mit Kräftepaaren zu rechnen. Vielmehr ist es Sinn des Freimachens, Kräftepaare aufzubrechen und nur mit einer der beiden Kräfte zu rechnen. Die Frage ist, mit welcher der beiden Kräfte man rechnen soll.

Prinzip von d'Alembert

Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (*1717 - † 1783 in Paris) war ein bedeutender Physiker und Mathematiker und ein Herausgeber der Encyclopédie.

Wenn ein System statisch nicht im Gleichgewicht ist, wird es von der Resultierenden beschleunigt und $F = m \cdot a$ wird dynamische Gegenkraft.

Damit können Aufgaben der Dynamik mit Verfahren der Statik gelöst werden.

Vertiefung

Aktionsprinzip „Kraft = Masse mal Beschleunigung“ →

$$[N] = \left[\frac{kg \cdot m}{s^2} \right] \rightarrow$$

→ 1 N beschleunigt 1kg mit 1m/s²

→ 9,81 N beschleunigt 1kg mit Erdbeschleunigung

FTM, MVK: ca. 90' Zeitbedarf (ca. 45' ohne Übungen); TG: entfällt

Sir Isaac Newton (*1642 - †1726) war einer der ganz großen Wissenschaftler. Kurz vor seinem Tod hat er nachweislich 4 Personen die Anekdote vom fallenden Apfel erzählt, der ihn auf die Schwerkraft gebracht haben soll. Dadurch weiß man zwar nicht, ob die Geschichte stimmt, aber, dass Newton wollte, dass die Geschichte bekannt wird. Ob Newton damit ua. auf die biblische Frucht der Erkenntnis anspielen wollte? Oder das Gegenteil?

AM Kreidekästchen auf einer hochgelegenen Fläche

1) Was wird benötigt, das Kreidekrästchen zu bewegen ? → Kraft
Bei Antworten wie Finger o.ä.: Es geht auch ohne Finger.

Demo: Kreidekrästchen mit Finger (= Kraft) anschubsen

2) Wie lange bleibt die Bewegung erhalten ? → ohne Reibung ewig

Viele Schüler meinen aus der Erfahrung mit der allgegenwärtigen Reibung, dass Bewegung nur aufrechterhalten wird, solange eine Kraft wirkt. Zur Demo:

Demo: Pendel (Taschenmesser) pendelt nach einem Schubs sehr lange

3) Wodurch wird die Bewegung verlangsamt ? → durch Reibung

4) Wie lange dauert eine Bewegung ohne Reibung oder Antrieb?

5) Vertiefung: Wie kann man beschreiben, was Beschleunigung ist ? Bei welchen 3 Gelegenheiten übt ein Kfz Kraft auf die Mitfahrer aus ? → Beschleunigen, Bremsen, Kurvenfahrt

1) Ist die Beschleunigung eines Porsche und eines 38t bei gleicher Kraft (Drehmoment) gleich groß ? → hängt noch von der Masse ab

2) Einheit m/s²: Ein Kfz beschleunige von 0 auf 100km/h in 5s:

Folgerung: Ein Porsche beschleunigt am schnellsten, wenn man ihn fallen lässt. Das erste s kommt $a = \frac{100 \text{ km/h}}{5 \text{ s}} = \frac{100000 \text{ m}}{3600 \text{ s} \cdot 5 \text{ s}} = 5,6 \frac{m}{s^2}$ aus der Geschwindigkeit (=Änderung des Weges pro Zeit), das 2. s aus der Änderung der Geschwindigkeit (pro Zeit).

P = Impuls. Die Formulierung Newtons war weitsichtig. Er hat nicht nur die Beschleunigung mit dv/dt umfassender formuliert, sondern auch andere Möglichkeiten, z.B. Kräfte durch Umlenkung von Fluidströmen: $F = m \cdot v$. Gemäß Relativitätstheorie erhöht F nicht nur die Geschwindigkeit, sondern auch die Masse; messbar wird es erst bei sehr großen Geschwindigkeiten.

1) Kreidekästchen in der Luft halten, Loslassen andeuten: welche Kraft wirkt auf das Kreidekästchen, wenn man es loslässt ? → Gewichtskraft
Versuch unterschiedlich schwere Gegenstände (z.B. Kreide/Papier) in die Luft halten

2) Wenn die Erde auf beide Körper dieselbe Gewichtskraft ausübt, welcher Körper müsste schneller fallen ? → der Leichte, weil seine kleine Masse durch dieselbe Kraft mehr beschleunigt wird (s.o.)

3) Welcher fällt schneller und warum ? → ohne Luftwiderstand keiner
Vers.: Fallen von ähnlich großen Körpern verschiedenen Gewichts, z.B. Messer und Kreide
AM Röhre mit Vakuum

4) Vgl. $F = ma$: wenn verschiedene Massen gleich beschleunigt werden, übt dann die Erde eine konstante Kraft auf uns ? → nein, aber Erdbeschleunigung ist konstant.

Nicht nur der Vollständigkeit halber, sondern zur Vorbereitung des Problems, in welche Richtung Kräfte wirken.

1) Kreidekästchen in der Luft fällt wegen der Erdbeschleunigung. Warum fällt das Kreidekästchen auf dem Tisch nicht ? Warum wird ein Auto bei konstant 100km/h nicht schneller, obwohl der Motor ständig Kraft aufbringt ? → Gegenkraft

→ Nach der üblichen Richtungsdefinition betrachten wir die Kräfte, die vom Rest der Welt auf den freigemachten Körper wirken.

Man könnte auch mit den Kräften rechnen, die vom freigemachten Körper auf den Rest der Welt wirken. Dieses System würde nur die Vorzeichen umdrehen, und somit auch die Richtung der Schwerkraft: Newtons Apfel würde als freigemachter Körper an der Erde ziehen. Physikalisch ist das sogar richtig, aber für uns fehlerträchtig ungewohnt.

Die Resultierende Kraft ist diejenige, die das System beschleunigt, die dynamische Kraft ist die Trägheitskraft des Systems.

Damit ist die Aufnahmekapazität der Schüler meist erreicht. Gewichtskraftberechnungen dienen hier der Abwechslung und, da sie relativ einfach sind, kann man gleichzeitig auf andere Themen übergreifen.

Vertiefung

MVK: [EuroRBM]

FTM: [Böge Aufg.] Aufgabe 495..514

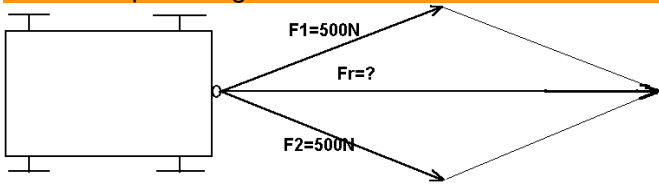
Sind gleichzeitig eine passende Überleitung vom Fach Dynamik

Statik_TA_Kraft-Beschleunigung.odt

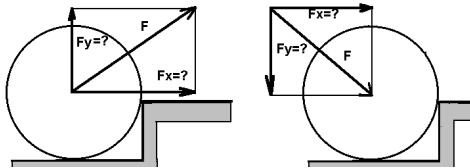


Grundoperationen der Statik

1. Kräfteparallelogramm



Die resultierende Kraft F_r zweier in einem Punkt angreifender Kräfte ist die Diagonale des aus beiden Kräften gebildeten Parallelogramms



2. Längsverschiebung



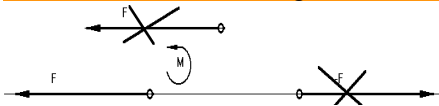
Kräfte können auf ihren Wirklinien frei verschoben werden.

3. Erweiterungssatz



Zwei gleich große, gegensinnige, auf gleicher Wirklinie liegende Kräfte können zu einem Kräftesystem hinzugefügt oder von ihm fortgenommen werden, ohne dass sich die Wirkung des Kräftesystems ändert.

4. Parallelverschiebung



Eine Kraft darf auf eine parallele Wirklinie verschoben werden, wenn ein Moment $M = \text{Kraft} \times \text{Verschiebarm}$ hinzugefügt wird (Versatzmoment).

(Kraft-)Moment einer Einzelkraft

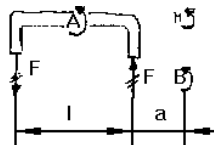
ist das Produkt aus Kraft und Wirkabstand (rechtwinklig zur Kraft gemessen)

Definition

- (+) = linksdrehend
- (-) = rechtsdrehend

Kräftepaare

bestehen aus zwei gleich großen, parallelen, entgegengesetzt wirkenden Kräften. Sie drehen einen freibeweglichen Körper ohne ihn zu verschieben.
z.B. Fahrradlenker



A: $M = F \cdot \frac{l}{2} + F \cdot \frac{l}{2} = F \cdot l$

B: $M = F \cdot (l + a) - F \cdot a = F \cdot l$

Das Drehmoment eines Kräftepaars ist an jedem Ort der Ebene gleich und kann deshalb beliebig in der Ebene verschoben werden.

MVK, FTM, TG: nicht unterrichten, nur beiläufig einbringen

Oben wurden schon einige „Rechenregeln“ für Kräfte eingesetzt. Welche weiteren sind bekannt?

Wie der folgende Verschiebesatz vom Meister selbst als Axiom eingeführt (Sir Isaac Newton 1643-1727) [4].

Analytische Berechnung:

- 1 Zerlegen der Kräfte in x- und y-Komponenten F_{1x}, F_{1y}, F_{2x} und F_{2y}
- 2 addieren der Komponenten $F_{rx} = F_{1x} + F_{2x}, F_{ry}$ analog

$$F_r = \sqrt{F_{rx}^2 + F_{ry}^2} \quad \alpha = \arctan \frac{F_{ry}}{F_{rx}}$$

3 Vektorielle Berechnung ist einfacher, da die Komponenten F_x und F_y explizit vorliegen:

$$F_r = F_1 + F_2 = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x} + F_{2x} \\ F_{1y} + F_{2y} \end{bmatrix}$$

Kräfte müssen, wie alle Vektoren, unter Berücksichtigung ihres Betrages, ihrer Wirklinie und ihrer Richtung addiert werden. Anwendung und Übung siehe unten
Resultierende Kraft ist diejenige gedachte Ersatzkraft, die dieselbe Wirkung auf einen Körper ausübt wie die Einzelkräfte F_1, F_2, \dots zusammen.

Zur Verdeutlichung der Kraftvektoren, ihrer Zerlegung und Zusammen - setzung: Umgekehrt geht es auch, Anwendung später.

Auf der Ebene macht es ohne Reibung keinen Unterschied, ob man den Kinderwagen schiebt oder zieht. Am Randstein weiß jeder aus Erfahrung, dass Ziehen günstiger ist. Im Bild erkennt man, dass die aufwärts gerichtete Komponente F , dem Wagen über den Randstein hilft. Tatsächlich ist auch auf der Ebene das Ziehen günstiger, weil es den Wagen entlastet und die Reibung vermindert. Trotzdem schiebt man Kinderwagen wegen des Blickkontaktes zum Kind und weil man sich abstützen kann.

In [Böge Technologie] und im LPE sind der Verschiebe- und der Erweiterungssatz in der Reihenfolge vertauscht.

AM Metallstab, Gummiband schieben und ziehen

Erkenntnis: für starre Körper ist es belanglos, ob eine Kraft „vorne“ oder „hinten“ einfließt (z.B. Heck- oder Frontantrieb). Bei nicht starren Körpern ergeben sich Änderungen (z.B. Krafteingriff in Gewinden, Gummiband unter dem Einfluss von Druckkraft und Reibung). Andere Veränderungen wie Stabilität sind nicht Thema der Statik, siehe Definition.

Folgt aus den Axiomen Parallelogramm und Längsverschiebung.

Welches F_r haben diese beiden betragsmäßig gleich großen Kräfte?

$F_r = 0$, deshalb kann es in jedes System eingesetzt werden.

„Auf gleicher Wirklinie“ folgt aus dem Längsverschiebungssatz.

Folgt aus den vorigen Axiomen und der Momentengleichung.

Vorgehensweise:

- 1 Kraft F oben eintragen
- 2 Kraft F und $-F$ unten eintragen (Erweiterungssatz)
- 3 Moment einsetzen, ursprüngliche Kraft F und $-F$ streichen.

Wird die Kraft auf ihrer Wirklinie ersetzt, entsteht kein Moment (Längsverschiebesatz).

Das Versatzmoment wirkt an jeder Stelle des Körpers

siehe oben, Kräftepaar am Beispiel Fahrradlenker.

Ültg: Tisch seitlich schieben: welche Wirkung von Kräften muss man auch in der Statik berücksichtigen?

Betrag und Richtung eines Momentes hängt von der Kraft und dem Bezugspunkt ab. Einheit Newtonmeter [Nm], nicht zu verwechseln mit Joule $J = Nm$: beim Drehmoment stehen Kraft und Weg rechtwinklig, bei der Arbeit parallel zueinander.

Die Richtung der Drehachse steht senkrecht auf der von Kraft und Hebelarm aufgespannten Ebene. In unserem Fall ist sie die z-Achse und kommt aus der Ebene heraus. Es gilt die

Rechtehandregel: Daumen der rechten Hand in Richtung der Drehachse, und die Finger weisen in positiver Drehrichtung.

Ültg: Schüler sollen einen Gegenstand mit einer Kraft drehen.

Geht nicht, immer ist Reibung, Gravitation, Trägheit o.ä. im Spiel.

Einzelkräfte bewirken keine Drehung. Ohne Reibung, Lager o.ä. würden sie nur eine Verschiebung bewirken.

Wird durch je zwei kurze Striche gekennzeichnet (wie parallele Linien)

Die Differenz der Hebelarme ist an jedem Punkt gleich, deshalb ist das Drehmoment an jedem Punkt gleich. Da die Kräfte sich ansonsten aufheben, kann dieses Kräftepaar durch je des andere mit gleichem Drehmoment ersetzt werden.

Ein Kräftepaar kann durch ein anderes ersetzt werden, wenn beide das gleiche Drehmoment haben, z.B. doppelter Betrag und halber Abstand; gleiche Kräfte in anderer Ausrichtung.



Resultierende Kraft in der Ebene berechnen

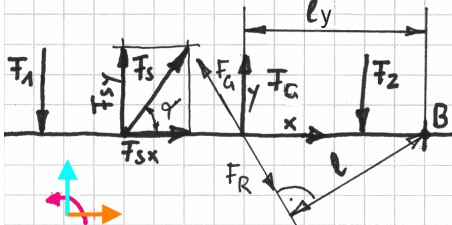
Zeichnerisches Pendant: Seileckverfahren.

Anwendung

- Ermittlung einer resultierenden Kraft mit Betrag, Richtung und Lage

Lageskizze

Balken ohne Auflager mit Gegenkraft



(F_G und F_R erst im Lauf der Berechnung eingetragen)

$$F_{sx} = F_s \cdot \cos \alpha = 25 \text{ kN} \cdot \cos 60^\circ = 12,5 \text{ kN}$$

$$F_{sy} = F_s \cdot \sin \alpha = 25 \text{ kN} \cdot \sin 60^\circ = 21,65 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_x = 0 = +F_{sx} + F_{Gx} \rightarrow F_{Gx} = -F_{sx} = -12,5 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0 = -F_1 + F_{sy} + F_{Gy} - F_2 \rightarrow F_{Gy} = F_1 - F_{sy} + F_2$$

$$= 30 \text{ kN} - 21,65 \text{ kN} + 20 \text{ kN} = 28,3 \text{ kN}$$

$$F_G = \sqrt{F_{Gx}^2 + F_{Gy}^2} = \sqrt{(-12,5)^2 + (28,3)^2} = 31 \text{ kN}$$

$$\alpha_G = \arctan \frac{F_{Gy}}{F_{Gx}} = \arctan \frac{28,3 \text{ kN}}{-12,5 \text{ kN}} = -66,2^\circ$$

$$|F_R| = |F_G| = 31,0 \text{ kN}$$

$$\alpha_R = \alpha_G = -66,2^\circ$$

(Dreh-)Moment = Kraft · Hebelarm (Kraft \perp Hebelarm)
 Das Vorzeichen ist positiv, wenn ein Moment in der Richtung des Koordinatensystems (siehe rotes Symbol) wirkt.

$$\Sigma M_B = 0$$

$$= F_2 \cdot l_3 - F_{sy} \cdot (l_2 + l_3) + F_1 \cdot (l_1 + l_2 + l_3) - F_G \cdot l \rightarrow$$

$$l = \frac{F_2 \cdot l_3 - F_{sy} \cdot (l_2 + l_3) + F_1 \cdot (l_1 + l_2 + l_3)}{F_G}$$

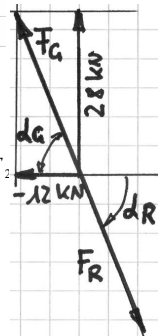
$$= \frac{20 \text{ kN} \cdot 0,7 \text{ m} - 21,65 \text{ kN} \cdot (1,5 + 0,7) \text{ m} + 30 \text{ kN} \cdot (2 + 1,5 + 0,7) \text{ m}}{31,0 \text{ kN}}$$

$$= 2,98 \text{ m}$$

Beispiel FTM: [Böge Aufg.] 79

Arbeitsplan

1. - 7. F_R und α_R wie im zentralen KS ermitteln
- nur gefragte Kräfte
- Gegenkraft F_G eintragen



8. Lage von F_G / F_R per $\Sigma M = 0$

8a. Drehpunkt wählen

- Im Bezugspunkt der Lage
- 7b. Momentengleichgewicht $\Sigma M = 0$**
- im Drehpunkt ansetzen
- Hebelarm und Kraftkomponente je nach Fragestellung
- Ergibt eine Gleichung mit einer Unbekannten = sofort lösbar.

Das Freimachen ist wie immer unverzichtbar, es genügt eine unmaßstäbliche Skizze. Es werden nur die Kräfte eingetragen, für die die resultierende Kraft F_R ermittelt werden soll. Statt F_R sollte man aber deren Gegenkraft F_G ermitteln, weil man diese mit den normalen Gleichgewichtsbedingungen berechnen kann ohne Verrenkungen mit dem Vorzeichen. Die Resultierende F_R wirkt dann entgegen der Gegenkraft F_G .

Die Lage von F_R bzw. der Abstand kommt mit dem Momentengleichgewicht ins Spiel.

Alternativ l_y :

$$\Sigma M_B = 0$$

$$= F_2 \cdot l_3 - F_{sy} \cdot (l_2 + l_3) + F_1 \cdot (l_1 + l_2 + l_3) - F_{Gy} \cdot l_y$$

$$l_y = \frac{F_2 \cdot l_3 - F_{sy} \cdot (l_2 + l_3) + F_1 \cdot (l_1 + l_2 + l_3)}{F_{Gy}}$$

$$= \frac{20 \text{ kN} \cdot 0,7 \text{ m} - 21,65 \text{ kN} \cdot (1,5 + 0,7) \text{ m} + 30 \text{ kN} \cdot (2 + 1,5 + 0,7) \text{ m}}{28,3 \text{ kN}}$$

$$= 3,26 \text{ m}$$

Vertiefung

[Böge 72-82](#)

Literaturverzeichnis

BadZtg: , Badische Zeitung,
 Böge Aufg.: Alfred Böge ua., Aufgabensammlung Technische Mechanik, 1999
 Böge Technologie: Alfred Böge, Technologie/Technik für Fachgymnasien und Fachoberschulen, 1994
 Böge, Techn. Mechanik: Alfred Böge, Technische Mechanik Statik - Dynamik - Fluidmechanik - Festigkeitslehre, 2009
 Culmann 1866: Karl Culmann, Die grafische Statik, 1866
 EuroRBM: , Europa Rechenbuch Metall,
 Ganten 2003: Detlev Ganten ua., Naturwissenschaft - Alles, was man wissen muss, 2003
 Gross 2015: Dietmar Gross u.a., Technische Mechanik 3, 2015
 Kurrer 2002: Karl-Eugen Kurrer, Geschichte der Baustatik, 2002
 Müller-Breslau I: Heinrich F.B. Müller-Breslau, Die graphische Statik der Baukonstruktionen, 1901
 Schneider21: Andrej Albert ua., Bautabellen für Ingenieure, 21.Auflage,, 2014
 SdW: wechselnde Autoren, Spektrum der Wissenschaft,
 Skolaut 2014: Werner Skolaut (Hrsg.), Maschinenbau - Ein Lehrbuch für das ganze Bachelor-Studium, 2014
 Tipler 1995: Paul Tipler, Physik, 1995