



# Statik

## Unterrichtsplanung für TGTM-J1

### Inhaltsverzeichnis

**Lehrplan**.....1

**Literaturverzeichnis**.....2

**Allgemeines**.....2

GFS.....

ProMan Präsentationen.....

Ideen / Themen.....

Register 1

Einführung

**Statik**.....3

Definition, Zweck.....

Vereinfachungen für die Schule.....

Darstellungen von Kräften.....

Rechnen mit Kräften in der Statik.....

  Gleichgewichtsbedingungen (allg.).....

  Die Hauptachsen im Raum.....

  Gleichgewichtsbedingungen 3D/2D.....

  Aufgabe lösbar in der Ebene?.....

  Aufgabe lösbar am Punkt?.....

Das Reaktionsprinzip und seine Folgen.....

Register 2

Statik I: Zentrales Kräftesystem

**Kräfte am Punkt zeichnerisch ermitteln**...4

Zusammensetzen von Kräften.....

  0. Lageplanskizze.....

  1. Lageplan.....

  2. Kräfteplan.....

  3. Resultierende  $F_R$  / Gegenkraft  $F$ .....

Zerlegen von Kräften.....

  4.  $F_R$  auf 2 Wirklinien verteilen.....

Lösungsgedanke bei grafischen Lösungen.....

**Kräfte am Punkt berechnen**.....5

Zusammensetzen – systematische Lsg.....

1. Lageplanskizze.....

2. Koordinatensystem festlegen.....

3. Tabelle der Kräfte erstellen.....

4. Kräfte in Komponenten zerlegen.....

5. Komponenten addieren.....

6. Betrag  $|F_R|$  der Resultierenden.....

7. Richtung  $\alpha_R$  der Resultierenden.....

Zerlegen - individuelle Lösung.....

  Rechtwinklige Dreiecke.....

  Beliebige Dreiecke.....

Systematische Lösung – Zerlegen.....

8. Kräftegleichgewichte  $\Sigma F_x = 0$  und  $\Sigma F_y = 0$ .....

Klassenarbeit Statik I  
Register 3

Freimachen

**Freimachen von Körpern**.....7

Zweck.....

Vorgehensweise.....

  1. Baugruppe wählen.....

  2. Alle Kräfte eintragen.....

  3. Bekannte Kräfte mit Richtung.....

  4. Unbekannte Kräfte.....

  5. Lösbarkeit prüfen.....

  6. Lageplanskizze anfertigen.....

Hinweise auf Richtungen von Kräften.....

  Seile, Ketten usw.....

  Zweigelenstäbe (Pendelstützen).....

  Berührflächen.....

  Rollkörper.....

Lose und feste Lager.....

  Einwertige Lager (Loslager).....

  Zweiwertige Lager (Festlager).....

  Dreiwertige Lager.....

### Statik II: Allgemeines Kräftesystem

**Auflagerkräfte in der Ebene berechnen**...9

Arbeitsplan.....

  1. Freimachen + Lageskizze erstellen.....

  2. Richtungen für unbekannte Kräfte annehmen (s.o.).....

  3. Gleichgewichtsbedingungen ansetzen + Gleichungssystem lösen.....

mögliche Vereinfachungen.....

  4. Momentengleichgewicht  $\Sigma M =$ .....

  5. Kräfte in Bemaßungsrichtung zerlegen.....

  6. Kräftegleichgewichte  $\Sigma F_x = 0$  und  $\Sigma F_y = 0$ .....

  7. ggf. zusätzliche Gleichungen.....

  8. Gleichungssystem lösen.....

  9. Betrag und Richtung ermitteln.....

  10. Plausibilität prüfen.....

Klassenarbeit Statik II

### Wiederholung

**Wiederholung Statik** → ME.....10

### Nicht explizit unterrichten

**Notizen**.....11

**Grundoperationen der Statik**.....12

  1. Kräfteparallelogramm.....

  2. Längsverschiebung.....

  3. Erweiterungssatz.....

  4. Parallelverschiebung.....

(Kraft-)Moment einer Einzelkraft.....

  Definition.....

  Kräftepaare.....

### Lehrplan

Richtziele des Unterrichts in Jahrgangsstufe 12

Die Statik als physikalisch-mathematische Grundlage jeder technischen Konstruktion stellt Lösungsverfahren zur Ermittlung von Bauteilbelastungen bereit.

25	Statik I	15 Stunden
	Die Schülerinnen und Schüler analysieren und beschreiben Kräfte und deren Wirkungen auf Systeme. Im zentralen und allgemeinen Kräftesystem berechnen sie unbekannte Kräfte. Sie wenden Kräfteaddition und Kräftezerlegung auf technische Fragestellungen an.	
	Kraft	
	Reibung an ebenen Flächen	
	Drehmoment	
	Freischneiden von Bauteilen und Baugruppen	Nur Statik in der Ebene
	Resultierende Kraft	
	Berechnung von Stützkräften	



## Literaturverzeichnis

BadZtg: , Badische Zeitung,  
Böge Aufg.: Alfred Böge ua., Aufgabensammlung Technische Mechanik, 1999  
Böge Technologie: Alfred Böge, Technologie/Technik für Fachgymnasien und Fachoberschulen, 1994  
Böge, Techn. Mechanik: Alfred Böge, Technische Mechanik Statik - Dynamik - Fluidmechanik - Festigkeitslehre, 2009  
EuroRBM: , Europa Rechenbuch Metall,  
Ganten 2003: Detlev Ganten ua., Naturwissenschaft - Alles, was man wissen muss, 2003  
Gross 2015: Dietmar Gross u.a., Technische Mechanik 3, 2015  
Kurrer 2002: Karl-Eugen Kurrer, Geschichte der Baustatik, 2002  
Müller-Breslau I: Heinrich F.B. Müller-Breslau, Die graphische Statik der Baukonstruktionen, 1901  
Müller-Breslau III: Heinrich F.B. Müller Breslau, Die graphische Statik der Baukonstruktionen - Band II Zweite Abheilung, 1908  
Schneider21: Andrej Albert ua., Bautabellen für Ingenieure, 21.Auflage,, 2014  
SdW: wechselnde Autoren, Spektrum der Wissenschaft,  
Skolaut 2014: Werner Skolaut (Hrsg.), Maschinenbau - Ein Lehrbuch für das ganze Bachelor-Studium, 2014  
Varignon 1725: Pierre Varignon, Nouvelle mecanique ou statique, 1725

### Allgemeines

#### GFS

- Pflicht ist eine in E und weitere insgesamt 3 in J1/J2
- In J1/J2 kann eine GFS eine Klassenarbeit ersetzen (pro Fach /Semester muss mind. 1 KA geschrieben werden)

#### Beschluss TG 28.06.11

- In den ersten 3 Semestern der Jahrgangsstufen muss je 1 GFS geschrieben werden.
- Überprüfung in der Notenkonferenz
- GFS soll im Niveau einer KA entsprechen
- GFS-Plan muss für alle 3 Semester bis Herbstferien J1 vorliegen
- Jede GFS muss in einem anderen Fach erfolgen

#### Ideen / Themen

- Stromtransport: Welche Bedeutung haben die Spannungsebenen (20kV, 110kV, 380kV)
- Biographie eines Ingenieurs / Technikers
- Übersicht über bedeutende Ingenieure (Wissenschaftler, Mathematiker ..) aus der Region
- Übersicht über die Wasserkraftwerke an der Wiese
- Industrialisierung des Wiesentals
- BHKw für Einfamilienhaus
- Solaranlage für Einfamilienhaus
- Abreißblock für Ausreden
- Einsatzgebiete eines Planetengetriebes

#### ProMan Präsentationen

- Welche Genehmigungen sind erforderlich
- Welche Institutionen unterstützen
- Technische Alternative
- grobe technische Planung einer Alternative
- Grundflächenbedarf
- Anschluss an die Infrastruktur

tg\_TA\_Allgemeines.odt



### Einführung

#### Statik

##### Definition, Zweck

Statik ist die Lehre vom Gleichgewicht der Kräfte in Körpern, die in Ruhe oder konstanter geradliniger Bewegung sind. Ihre Ergebnisse sind Grundlage der Festigkeitsrechnung.

##### Vereinfachungen für die Schule

- alle Körper sind starr
- Reibung wird meist vernachlässigt
- nur 2D-Probleme (in der Ebene)
- Kräftegriff wird auf Punkte reduziert

##### Darstellungen von Kräften

Kräfte sind Vektoren und gekennzeichnet durch

- Betrag und
- Richtung (Wirklinie WL und Richtungssinn)

$F=10N$  nur Betrag ohne Richtungsangabe  
zeichnerisch, Betrag wird durch die Länge dargestellt, Richtung durch sich selbst.

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} 3 N \\ 4 N \end{bmatrix} = [53,1^\circ; 5 N]$$

##### Rechnen mit Kräften in der Statik

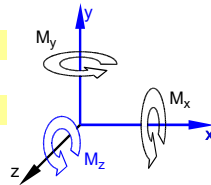
Aus  $F = m \cdot a$  und  $a=0$  (Statik!) folgt:

##### Gleichgewichtsbedingungen (allg.)

$$\Sigma F = 0$$

##### Die Hauptachsen im Raum

(Pfeilrichtung ist +)



##### Gleichgewichtsbedingungen 3D/2D

Aus  $F = m \cdot a$  und  $a=0$  (Statik!) folgt (2D bzw. 3D):

$\Sigma F_x = 0$	bzw.	$\Sigma F_x = 0$	$\Sigma M_x = 0$
$\Sigma F_y = 0$		$\Sigma F_y = 0$	$\Sigma M_y = 0$
$\Sigma M = 0$		$\Sigma F_z = 0$	$\Sigma M_z = 0$

Gelten für jedes Teil und jedes Koordinatensystem.

##### Aufgabe lösbar in der Ebene?

Für TG liegen alle Kräfte in einer Ebene:

→ es gelten 3 Gleichgewichtsbedingungen

$$\Sigma F_x = 0; \Sigma F_y = 0; \Sigma M = 0$$

Nur 3 unbekannte Größen (Kraftbeträge, Krafrichtungen, Momente) können gelöst werden.

Wer mehr Unbekannte hat, muss weitere Informationen suchen oder die Aufgabe überspringen

##### Aufgabe lösbar am Punkt?

Im zentralen KS wirken alle Kräfte durch einen Punkt

→ ohne Hebelarme wirken keine (Dreh-)Momente

→ es gelten nur noch 2 Gleichungen

$$\Sigma F_x = 0; \Sigma F_y = 0$$

Im zentralen KS sind nur noch 2 Größen lösbar, z.B.

- eine Kraft nach 1 Betrag und 1 Richtung oder
- 2 Kräfte mit bekannter Richtung

##### Das Reaktionsprinzip und seine Folgen

Kräfte treten IMMER paarweise auf (actio = reactio)

Um mit Kräften rechnen zu können, muss man die Kräftepaare auftrennen → Freimachen

Vertiefung: keine

FTM, TG:ja; MVK: entfällt

FO Steinmetz-Meisterprüfung, Nürnberg ca.1570 ([SdW] 11/91)

FO Freiburger Münster [BadZtg] 30.11.2014

1) Welche Fachgebiet muss man heutzutage dazu beherrschen? Statik

Verfahren der Alten: Erfahrung und Ästhetik (=Theorie?) wurden in Regeln umgesetzt.

2) Warum lassen wir am TG die konstante geradlinige Bewegung nicht zur Vereinfachung weg?

Konstante geradlinige Bewegung kann man von Ruhe gar nicht unterscheiden – z.B. fliegen wir ziemlich schnell um die Sonne.

3) Was wird in der Statik betrachtet? Kräfte.

4) Welche Wirkungen haben Kräfte?

Bewegungs- (Thema der Kinetik, wie Statik ein Teilgebiet der Dynamik) oder Formänderungen (meist vernachlässigt): Ideal starre Körper erfahren keine Formänderung durch Kräfte, sodass sich die Kraftangriffspunkte nicht verschieben.

Ursache für Kräfte?  $F = m \cdot a$ ;  $F = E \cdot \Delta x / \epsilon$ , Reibung (meist vernachlässigt) usw.

5) Was muss man von einer Kraft wissen, wenn man mit ihr rechnen will? Auf den Tisch setzen ( $\approx 1kN$ ), Tisch schieben, am Tisch ziehen.

Der Angriffspunkt der Kraft ist zwar auch wichtig, aber keine der Kraft innewohnende Eigenschaft. Wirklinie ist die Verlängerung des Kraftvektors in beiden Richtungen, Richtungssinn ist die Richtung des Kraftvektors auf der WL.

Bedeutung der Krafrichtung: Man möge versuchen, ein Auto seitwärts anzuschieben.

Müsste genauer  $|F| = 10 N$  heißen! Einheit Newton [N] =  $kg \cdot m / s^2$

vektoriell, schließt die Richtung ein

1) Um wie viele Prozente wird die Rechnung von vereinfacht bei der Reduktion von 3D auf 2D?

FO Flieger

3D bedeutet 3 Kräfte und 3 Momente, 2 D nur 2 Kräfte und 1 Moment, d.h. die Vereinfachung beträgt 50%.

In der Ebene fallen  $F_z$ ,  $M_x$  und  $M_y$  weg; Danach ist die Indizierung von M nicht mehr nötig, weil keine Verwechslungsgefahr mehr besteht.

Dreifingerregel: Koordinatensystem mit Daumen (x-Achse), Zeigefinger (y-Achse) und Mittelfinger (z-Achse) der rechten Hand aufspannen.

Rechtehandregel: Daumen der rechten Hand in Richtung der Drehachse, und die Finger weisen in positiver Drehrichtung.

2) Wie lauten die Gleichgewichtsbedingungen ?

Die zeichnerischen Lösungen beruhen auf denselben Gleichgewichtsbedingungen! Drehen um die Querachse: Nicken, Stampfen, früher auch Galoppieren ([SdW] 08/2015 S.111)

Im Einzelfall kann es sinnvoll sein, auch andere Krafrichtungen oder Drehpunkte außerhalb des betrachteten Körpers zu wählen.

3) Wie viele Unbekannte können mit 6/3 Gleichungen gefunden werden ?

Mit 3 Gleichungen kann man 3 unbekannte Kräfte ermitteln (statische Bestimmtheit).

Als statisch bestimmtes ebenes System bezeichnet man einen Körper, der so gelagert ist, dass nur drei unbekannte Auflagerreaktionen angreifen.

Beispiel: Eine Lagerung mit Fest- und Loslager ist statisch bestimmt, eine Lagerung mit 2 Festlagern ist überbestimmt.

Statisch überbestimmte System (mehr Auflagerreaktionen möglich) erfordern weitere Gleichungen zur Lösung (z.B. Dehnung durch Kraft oder Wärme bei zwei Festlagern).

Weniger Auflagerreaktionen heißt einfach, dass das Teil lose ist. Die statische Bestimmtheit muss in jeder Raumrichtung erfüllt sein.

##### Fundsachen

Deckenlasten: [Schneider21] S.3.22f: Es werden nicht nur Flächenlasten (Schnee, Wind, Lagergut, ...) berücksichtigt, sondern ggf. Faktoren bei Hubschrauberlandeplätzen, Regelbetrieb bei Gegengewichtstaplern, Böengeschwindigkeitsdruck ... S.3.49: Schneelast: Lörrach gehört zur Zone 2 (Hochschwarzwald 2a = höchste Stufe). Formel ( $A = \text{Geländehöhe in [m]}$ ):

$$S_U = 0,25 + 1,91 \cdot \left( \frac{A + 140}{760} \right) \geq 85 \frac{kN}{m^2}$$

Brücken: [Schneider21] S.3.59: Anpralllasten (Fahrzeuganprall an Brückenpfeiler), S.3.63 Schwingungsbeiwert für Hauptspur.

Erdbeben: [Schneider21] S.3.66f: Lörrach gehört zur höchsten Erdbebenzone 3v

4) Tauziehen mit je 5kN (500kg): Zugkraft im Tau?

Die Zugkraft beträgt 5kN und nicht etwa das Doppelte, denn Kräfte treten IMMER paarweise auf (actio = reactio). Die Kräftepaare addieren sich nicht, sondern heben sich auf, und erfüllen so die Gleichgewichtsbedingung trivial und nutzlos. Um die Gleichgewichtsbedingungen anwenden zu können, muss man die Kräftepaare auftrennen und betrachtet dann alle Kräfte, die von außen auf eine beliebige Baugruppe wirken. Das Verfahren heißt Freimachen und wird unten behandelt.



### Statik I: Zentrales Kräftesystem

#### Kräfte am Punkt zeichnerisch ermitteln

Statik I → Zentrales Kräftesystem → alle Kräfte wirken durch einen Punkt → keine Hebelarme → Es treten keine Momente auf → Gleichgewichtsbedingung  $\sum M = 0$  entfällt → nur 2 unbekannte Größen sind lösbar. [Skolaut 2014] S.24: „Ebenes Kräftegleichgewicht am Punkt“

**Zielgruppe:** alle  
Angewendet werden die statischen Grundoperationen Parallelogramm, Erweiterungssatz, Verschiebesatz. Die ausgeführten Beispiele stammen aus der ersten Quelle: [ulrich-rapp.de/stoff/statik/Statik\\_Ub\\_zentral.pdf](http://ulrich-rapp.de/stoff/statik/Statik_Ub_zentral.pdf);  
[Müller-Breslau I] S.1: „Die graphische Statik lehrt die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte auf geometrischem Wege und entwickelt in gleicher Art die Bedingungen, unter denen sich die auf einen Körper wirkenden Kräfte im Gleichgewicht befinden.“

#### Zusammensetzen von Kräften

TG: Aufg. 1a, Oberleitungsrolle; MVK: [EuroRBM]; FTM: [Böge Aufg.] Aufgabe 29 (Richtung definieren)  
LS Seilrolle

#### Arbeitsplan

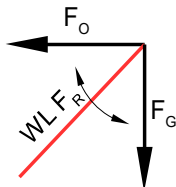
#### Ergebnis abschätzen Welche Kräfte wirken überhaupt ?

Arbeitsplan kann auch Algorithmus, Kochrezept, Arbeitsanweisung, Vorgehensweise oder neudeutsch Workflow heißen.

Die LP-Skizze ist ein Entwurf des LP und an keine Form gebunden. Sie ist keine Pflicht, aber empfehlenswert, denn beim Skizzieren kann man die Aufgabe erfassen ohne sich mit Formalien zu belasten. Ich gebe für eine verständliche Skizze ca. 1/4 .. 1/3 der Punktzahl. [Gross 2015] S.2 verwendet den Begriff Freikörperbild statt Lageskizze.

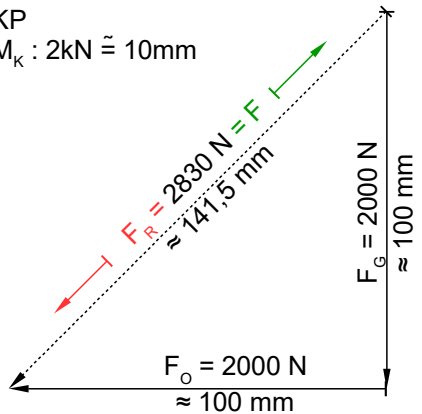
LP Seilrolle

$M_L$  : noch nicht nötig



KP

$M_K$  : 2kN  $\hat{=}$  10mm



#### 0. Lageplanskizze

= Lageplan ohne formelle Regeln  
→ hält den Kopf frei für das Problem

#### 1. Lageplan

Geeignete Baugruppe auswählen, nennen und alle auf die Baugruppe wirkenden Kräfte einzeichnen  
– Wirklinien winkeltreu  
– Richtungen: wie wirkt RdW auf BG  
– Angriffspunkte lagetreu (Lagemaßstab): (nur wenn zeichn. Lösungen für das allg. Kräftesystem im Lehrplan stehen)

#### Kräfte eintragen, wo sie wirken.

Der Lageplan ist die zeichnerisch-formale Fassung von "Gegeben und Gesucht".  
Im allgemeinen Kräftesystem fließen über den Lagemaßstab der Abstand der Kräfte und damit die Momente ein. Beim zentralen System erübrigt sich das Eintragen der Angriffspunkte, da sie alle an einem Punkt angreifen.  
Unbekannte WL können wie gezeigt oder für rechn. Lösungen mit x- und y-Komponenten dargestellt werden.  
Richtung: Wie wirkt der Rest der Welt auf die Baugruppe.

#### 2. Kräfteplan

Kräfte eintragen  
– maßstabsgerecht (Kräftemaßstab)  
– hintereinander als Pfeilkette  
– winkeltreu (Parallelverschiebung)

#### Kräfte → geschlossener Linienzug.

Der Kräfteplan ist das Lösungsverfahren und sollte streng vom LP unterschieden werden. Deshalb akzeptiere ich auch keine Parallelogramme, die bei 2 Kräften noch möglich wären. Die Richtungen sollen per Parallelverschiebung übertragen werden, weil es dabei deutlich weniger Fehler gibt. Die gegebenen Kräfte werden richtungsgemäß und maßstabsgerecht so aneinander gereiht, dass sich ein fortlaufender Kräftezug ergibt. Anfangspunkt und Reihenfolge der Kräfte sind beliebig.

#### 3. Resultierende FR / Gegenkraft F

$F_R$  (Ersatzkraft) ist die 'Abkürzung im KP' und ersetzt die gegebenen Kräfte  
 $F$  schließt das Kräfteck und hält die gegebenen Kräfte im Gleichgewicht.

Ob die Resultierende oder die Gegenkraft gefragt ist, hängt von der Aufgabe ab. Beide sind gleich groß, aber entgegengerichtet.  
Die Resultierende ist die Kraft, die die gegebenen Kräfte ersetzen kann. Beispiel: Wenn auf ein Fahrzeug Antriebskräfte, Luftwiderstand und Rollreibung wirken, kann man diese zusammenfassen und mit der Resultierenden die Beschleunigung zu ermitteln.

Ausmessen, umrechnen mit  $M_K$ .

#### Plausibilitätsbetrachtung

Plausibilität: Kann das stimmen?  
Vorher Ergebnis abschätzen und nachher Plausibilitätsbetrachtung gehören zu jeder Aufgabe.

#### Vertiefung

TG: UB Statik zentral; MVK: [EuroRBM]

FTM: [Böge Aufg.] Aufg. 30ff (30 definiert Winkelangabe)

#### Zerlegen von Kräften

TG: Aufg. 4a: Eimerziehen2; MVK: [EuroRBM]; FTM: [Böge Aufg.] Aufgabe 40f (L), 44f

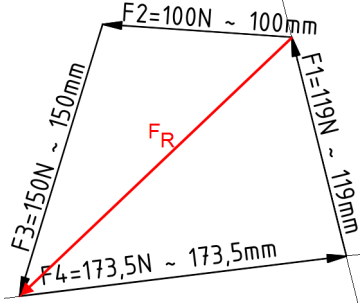
#### Arbeitsplan

0-3 wie oben (bek. Kräfte addieren)

Ültg: Aufgabe 3 ist grundsätzlich neu, da nicht eine Kraft gesucht wird, sondern zwei.

LP siehe Aufgabe

KP  $M_K = 100N \hat{=}$  100mm



#### 4. FR auf 2 Wirklinien verteilen

– WL einer Kraft parallel verschieben durch den Anfang von  $F_R$  und  
– WL der anderen Kraft parallel verschieben durch den Endpunkt von  $F_R$ .  
– Die unbekannt Kräfte werden durch den Schnittpunkt begrenzt.  
– Richtung der Kräfte einheitlich (mit / gegen Uhrzeigersinn)

Zu diesem Verfahren müssen die Krafrichtungen bekannt sein. Hinweise auf die Krafrichtungen hat man bei Seilen, Ketten, Zweigelenstäben, einwertigen Lagern usw. Wenn die Krafrichtungen nicht bekannt sind, müssen die Drehmomente eingerechnet werden, dies geschieht zeichnerisch im Schlusslinienverfahren.  
Drei und mehr unbekannt Kräfte sind ohne Randbedingungen nicht lösbar.

$F_R$  muss im Kräfteplan nicht eingetragen werden.

#### Vertiefung

TG: UB Statik zentral; MVK: [EuroRBM]

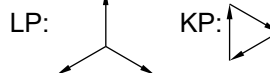
FTM: [Böge Aufg.] Aufgabe 49ff.

Fachwerke ([Böge Aufg.] Aufg. 69ff) können vorläufig gelöst werden, indem man sich von Knoten zu Knoten hangelt. Sobald das allgemeine Kräftesystem behandelt ist, kann das Rittersche Schnittverfahren verwendet werden.

#### Lösungsgedanke bei grafischen Lösungen

Alle Kräfte, die sich im Lageplan in einem Punkt treffen, ergeben im Kräfteplan einen geschlossenen Linienzug.

Der geschlossene Linienzug aller Kräfte ist der graphische Ausdruck der Gleichgewichtsbedingungen der Statik.



(Stern ↔ Dreieck ;-)



Kräfte am Punkt berechnen

[Skolaut 2014] S.24: „Ebenes Kräftegleichgewicht am Punkt“

FTM, MVK: kein Zerlegen. TG: volles Programm

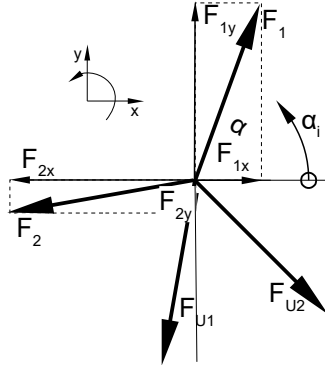
Zusammensetzen – systematische Lsg.

Arbeitsplan:

(ohne KP)

TG: FTM: UB Statik zentral 4a: Mobile Antenne; MVK: [EuroRBM] Geg: F<sub>1</sub>; F<sub>2</sub>; Ges.: F<sub>R</sub>; F<sub>3</sub>; F<sub>4</sub>

Lageskizze mobile Antenne



- 1. Lageplanskizze
2. Koordinatensystem festlegen
3. Tabelle der Kräfte erstellen

Alle Winkel alpha von der x-Achse (ccw)!

Table with 5 columns: Force, Magnitude [N], Angle [degrees], Fx [N], Fy [N]. Rows include F1, F2, FR, FU1, FU2 and a control sum.

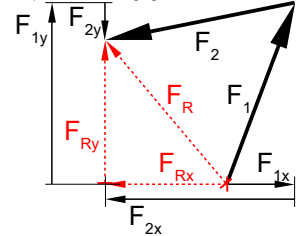
Dieser programmierfähige Algorithmus spart fehlerträchtige Überlegungen und übt alle nötigen Techniken ein:

5) Freimachen

Freimachen ist bei allen Statikaufgaben unverzichtbar. Zur Dokumentation genügt eine Skizze.

6) Komponenten

Skizze: Die Komponenten von FR setzen sich aus den Komponenten der gegebenen Kräfte zusammen.



7) Winkelangaben

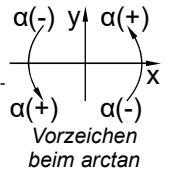
Alle Winkel alpha ccw (= counter clock wise = gegen den Uhrzeigersinn) von derselben (x-)Achse -> Vorzeichen der Komponenten ergeben sich automatisch -> weniger Fehler.

Für die Zerlegung in Komponenten muss man genau einmal überlegen, ob man sin oder cos einsetzen muss, danach läuft alles automatisch.

Komponenten addieren ergibt die Komponenten der Resultierenden FR. FR meint den Betrag der n-ten Kraft alpha ist der Winkel von der x-Achse gegen den Uhrzeiger bis zur Kraft.

Betrag mit Pythagoras aus den Komponenten berechnen.

Die genaue Richtung alpha\_R bekommt man mit den Komponenten FRx und FRy heraus, da rentiert sich kein Algorithmus. Statt Regeln auswendig zu lernen, sollte man das Problem erkennen und nach Plausibilität lösen.



- alpha ab +x-Achse angeben
Wenn FRx >= 0 -> alpha\_R zählt ab der +x-Achse
Wenn FRx < 0 -> alpha\_R zählt ab der -x-Achse

Mathematical calculations for force components: F1x, F1y, F2x, F2y, FRx, FRy, FR, alpha'\_R, alpha\_R.

4. Kräfte in Komponenten zerlegen

Komponenten = Kraftanteile in Koordinatenrichtungen

FRx = FR cos alpha\_n; FRy = FR sin alpha\_n

5. Komponenten addieren

FRx = F1x + F2x + ...; FRy = Sigma Fny

6. Betrag |FR| der Resultierenden

|FR| = sqrt(FRx^2 + FRy^2)

7. Richtung alpha\_R der Resultierenden

arctan liefert zwei-deutige Werte -> Winkel muss präzisiert werden:

- Vorzeichen der Komponenten -> Skizze !! oder

- alpha ab +x-Achse angeben

- Für FRx >= 0 gilt: alpha\_R = alpha'\_R
Für FRx < 0 gilt: alpha\_R = alpha'\_R + 180°

Zerlegen - individuelle Lösung

= Durchwurstein anhand des Kräfteplans

Prinzip:

- 8. Lageplanskizze
9. Kräfteplanskizze
10. Kräfte mithilfe KP und Winkelfunktionen berechnen

Rechtwinklige Dreiecke

Zerlegen in rechtwinklig zueinander stehende Komponenten.

Winkelfunktionen

FRx = FR cos alpha\_R; FRy = FR sin alpha\_R

[Böge Aufg.] Aufg. 42f

Beliebige Dreiecke

Kräfteplanskizze mit der bekannten Kraft FR und den Wirklinien der unbekannt Kräfte FU1 und FU2

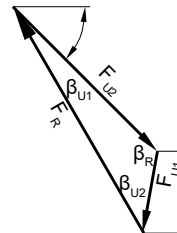
Beispiel:

[Böge Aufg.] Aufg. 51

Calculations for force components using sine rule: FU1, FU2.

Sinussatz

FR / sin beta\_R = FU1 / sin beta\_U1 = FU2 / sin beta\_U2



Für einfache Aufgaben braucht man keinen komplizierten Algorithmus. Oft genügt es, den Kräfteplan zu skizzieren und dann die gesuchten Kräfte mit ein paar Winkelfunktionen zu berechnen.

Das Zerlegen in rechtwinklig zueinander stehende Kräfte ist häufig notwendig und muss von jedem Schüler beherrscht werden.

Skizze mit Werten der Beispielaufgabe

Winkel für das Beispiel: beta\_U1 = 180 - alpha\_R + alpha\_U2 = 180 - 119,1 - 45 = 15,9; beta\_U2 = alpha\_R - (alpha\_U2 - 180) = 119,1 - (260 - 180) = 39,1; beta\_R = (alpha\_U1 - 180) - alpha\_U2 = (260 - 180) - (-45) = 125; Kontrolle: 15,9 + 39,1 + 125 = 180°

Auch die Berechnung der Innenwinkel kann man automatisieren, aber der Aufwand lohnt sich nicht ggü. einer individuellen Lösung.

Vertiefung

TG: UB Statik zentral, MVK: [EuroRBM]

FTM: [Böge Aufg.] Aufg. 51f

Statik\_TA\_zentral-rechnerisch.odt



## Systematische Lösung – Zerlegen

$$\Sigma F_x = 0 = F_{Rx} + F_{U1x} + F_{U2x} = F_{Rx} + F_{U1} \cdot \cos \alpha_{U1} + F_{U2} \cdot \cos \alpha_{U2}$$

$$\rightarrow F_{U2} = \frac{F_{Rx} + F_{U1} \cdot \cos \alpha_{U1}}{-\cos \alpha_{U2}}$$

$$\Sigma F_y = 0 = F_{Ry} + F_{U1y} + F_{U2y} = \dots \rightarrow F_{U2} = \frac{F_{Ry} + F_{U1} \cdot \sin \alpha_{U1}}{-\sin \alpha_{U2}}$$

$$F_{U2} = \frac{F_{Rx} + F_{U1} \cdot \cos \alpha_{U1}}{-\cos \alpha_{U2}} = \frac{F_{Ry} + F_{U1} \cdot \sin \alpha_{U1}}{-\sin \alpha_{U2}} \rightarrow$$

$$F_{U1} = \frac{-F_{Rx} \cdot \sin \alpha_{U2} + F_{Ry} \cdot \cos \alpha_{U2}}{\cos \alpha_{U1} \cdot \sin \alpha_{U2} - \sin \alpha_{U1} \cdot \cos \alpha_{U2}}$$

$$F_{U2} = \frac{-F_{Rx} \cdot \sin \alpha_{U1} + F_{Ry} \cdot \cos \alpha_{U1}}{\cos \alpha_{U2} \cdot \sin \alpha_{U1} - \sin \alpha_{U2} \cdot \cos \alpha_{U1}}$$

$$F_{U1} = 229,1 \text{ N} \cdot \frac{-\cos 119,1^\circ \cdot \sin(-45^\circ) + \sin 119,1^\circ \cdot \cos(-45^\circ)}{\cos 260^\circ \cdot \sin(-45^\circ) - \sin 260^\circ \cdot \cos(-45^\circ)} = 76,6 \text{ N}$$

$$F_{U2} = 229,1 \text{ N} \cdot \frac{-\cos 119,1^\circ \cdot \sin 260^\circ + \sin 119,1^\circ \cdot \cos 260^\circ}{\cos(-45^\circ) \cdot \sin 260^\circ - \sin(-45^\circ) \cdot \cos 260^\circ} = 176,5 \text{ N}$$

## gerechnete Beispiele

[Böge Aufg.] Aufg. 51

## Zusammensetzen

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha_1 = 320 \text{ N} \cdot \cos 35^\circ = 262,1 \text{ N}$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha_1 = 320 \text{ N} \cdot \sin 35^\circ = 183,5 \text{ N}$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 180 \text{ N} \cdot \cos 55^\circ = 103,2 \text{ N}$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin \alpha_2 = 180 \text{ N} \cdot \sin 55^\circ = 147,4 \text{ N}$$

$$F_{3x} = F_3 \cdot \cos \alpha_3 = 250 \text{ N} \cdot \cos 160^\circ = -234,9 \text{ N}$$

$$F_{3y} = F_3 \cdot \sin \alpha_3 = 250 \text{ N} \cdot \sin 160^\circ = 85,5 \text{ N}$$

$$F_{Rx} = +F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 262,1 \text{ N} + 103,2 \text{ N} - 234,9 \text{ N} = 130,4 \text{ N}$$

$$F_{Ry} = +F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 183,5 \text{ N} + 147,4 \text{ N} + 85,5 \text{ N} = 416,4 \text{ N}$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = 436,3 \text{ N}$$

$$= \sqrt{(130,4 \text{ N})^2 + (416,4 \text{ N})^2}$$

$$\alpha_R = \arctan \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = \arctan \frac{416,4 \text{ N}}{130,4 \text{ N}} = 72,6^\circ$$

zur positiven x-Achse (nach rechts oben)

FTM, MVK: kein Zerlegen, TG: nur Ergebnis

Die Herleitung der Formel ist ggü. der Lösung mit Sinussatz zu aufwendig, das Auswendiglernen der Formel nicht sinnvoll → individuelle Lösung mit Sinussatz bevorzugen

1) Herleitung

8. Kräftegleichgewichte  $\Sigma F_x = 0$  und  $\Sigma F_y = 0$ und die unbekanntenen Kräfte  $F_{U1}$  und  $F_{U2}$  per Gleichungssystem lösen2)  $F_{U2}$  analog herleiten oder Symmetrie nutzen

3) Allgemeine Formel

4) Man beachte die Symmetrie der Gleichungen, die mehrfach nützlich sein kann:

- Kontrollmöglichkeit

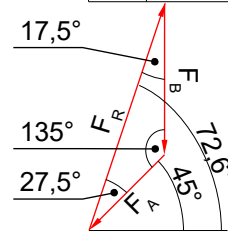
- Analogieschlüsse

- Ästhetik / Spass an Mathe vermitteln

5) Beispiel: Mobile Antenne

## Zerlegen

	F	$\alpha$	$F_x$	$F_y$
$F_1$	320N	$35^\circ$	262,1N	183,5N
$F_2$	180N	$55^\circ$	103,2N	147,4N
$F_3$	250N	$160^\circ$	-234,9N	85,5N
$F_R$	436,3N	$72,6^\circ$	130,4N	416,4N
$F_A$	184,5N	$225^\circ$	-130,4N	-130,4N
$F_B$	286,0N	$270^\circ$	0	-286,0N



$$F_A = F_R \cdot \frac{\sin \alpha_A}{\sin \alpha_R} = 436,6 \text{ N} \cdot \frac{\sin 17,4^\circ}{\sin 135^\circ} = 185 \text{ N}$$

$$F_B = F_R \cdot \frac{\sin \alpha_B}{\sin \alpha_R} = 436,6 \text{ N} \cdot \frac{\sin 27,6^\circ}{\sin 135^\circ} = 286 \text{ N}$$

## Freimachen

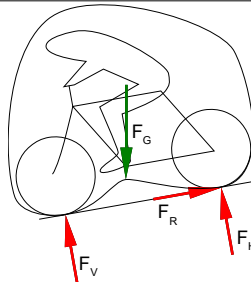
## Freimachen von Körpern

= Bauteile durch Kräfte ersetzen

## Zweck

- Erkennen aller Kräfte an einer BG
- Voraussetzung für alle Lösungen in der Statik

zB. tgm HP92/93-1 Mountainbike  
Lageskizze Rad + FahrerIn  
Ges.: Aufstandskräfte



## Vorgehensweise

## 1. Baugruppe wählen

- Geeignete BG grenzen an gesuchte Kräfte

## 2. Alle Kräfte eintragen

- An jedem Kontakt zw. der BG und dem Rest der Welt
- $\perp$  rechtwinklig zur Berührfläche (Normalkraft) bzw.  $\parallel$  parallel zur Berührfläche (Reibung)
- Gravitation (Gewichtskräfte)

## 3. Bekannte Kräfte mit Richtung

- Richtungskonvention: Wie wirkt der RdW auf die BG?

## 4. Unbekannte Kräfte

- Einwertiges Lager: Richtung annehmen
- Zweiwertiges L.: 2 Richtungen eintragen (z.B.  $F_x$ ,  $F_y$ )

## 5. Lösbarkeit prüfen

- Lösbar sind max. als 3 unbekannte Größen (Beträge und/ oder Richtungen von Kräfte).

Wer zu viele Unbekannte hat, muss Infos suchen:

## 6. Lageplanskizze anfertigen

- LS dokumentiert die Überlegungen

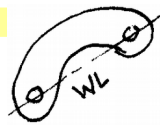
## Hinweise auf Richtungen von Kräften

Seile, Ketten usw.

übertragen nur Zugkräfte in Seilrichtung

## Zweigelenkstäbe (Pendelstützen)

= an 2 Stellen drehbar gelagert  
übertragen Zug- oder Druckkräfte nur in der Verbindungslinie der Gelenkpunkte.  
z.B. Kolben, Gitterstäbe



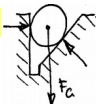
## Berührflächen

übertragen Normalkräfte senkrecht und Reibkräfte parallel zur Berührfläche.



## Rollkörper

Normalkräfte bei Rollkörper (Kugeln, Rollen) gehen durch ihren Mittelpunkt.



FTM, TG: Erarbeiten anhand der Übungen; MVK: entfällt

"Freimachen" ist das geistig anspruchsvollste Thema, das Technik M am TG zu bieten hat; gleichzeitig ist es die Grundlage zum Lösen von Statikaufgaben. Wer nicht richtig freimacht, braucht gar nicht anfangen zu rechnen... Im zentralen Kräftesystem sind die Aufgaben meist so einfach gestrickt, dass das Freimachen intuitiv möglich ist und seine Bedeutung nicht klar wird. Deshalb führe ich diese Einheit erst danach durch und vertiefe es in den Übungen zum allgemeinen KS. Meine Vorgehensweise: Kurz die Regeln anhand eines Beispiels erklären, dann drillmäßiges Üben [Skolaut 2014] S.8, S.28: verwendet die Begriff „Freischneiden“ und „Freikörperbild“, letzteres neben Kräften auch mit Maßen u.ä.

1) Im System Rad+FahrerIn findet man zahlreiche Kräfte und Gegenkräfte (Kräftepaare):

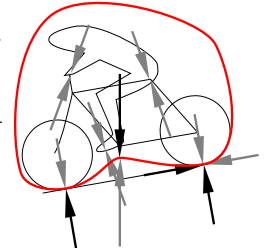
Rad drückt gegen Straße und zurück, vorne wie hinten, Reibung vs. Antriebskraft, Hände vs. Lenker, Gesäß vs. Sattel, Erde zieht an Rad+Fahrer und umgekehrt, u.v.a.m.

2) Was kann man damit anfangen?

Nix! Die An/Unzahl der Kräfte ist unhandlich und Kräftepaare, die sich per se aufheben, bieten keinen Ansatz für die Gleichgewichtsbedingungen.

3) Gesucht ist ein Verfahren, um die Kräftepaare zu reduzieren und aufzusprengen

→ Freimachen: Man entscheidet sich für eine BG und zieht einen symbolischen Kringel darum. Reduktion: Alle Kräftepaare, die innerhalb oder außerhalb des Kringels liegen, werden ignoriert. Fraktion: Von den Kräftepaaren, die an der Grenze der BG liegen bzw. von der Systemgrenze zerschnitten werden, betrachtet man nur die Kräfte, die von außen auf die BG wirken.



[Böge, Techn. Mechanik] einarbeiten,

Im Prinzip muss man nur die gesuchten Kräfte eintragen und hat schon einen Teil der Grenze der geeigneten Baugruppe. Auf die BG dürfen beliebig viele bekannte Kräfte wirken. Sonstige Kräfte möglich (Schule nur im Einzelfall), sie zählen aber zu den unbekanntem Kräften.

Gewichts- und Reibungskräfte werden berücksichtigt, wenn es verlangt wird.

Vom freizumachenden Körper werden alle Berührstellen entfernt und durch die zugehörigen Kräfte ersetzt. Am Besten denkt man sich eine Linie um die gewählte Baugruppe und sucht alle Kräfte, die diese Linie überschreiten.

Schüler setzen Kräfte oft nach Wunschdenken ein, z.B. "da brauche ich noch eine Kraft" oder auf Verdacht "Da bewegt sich was". Das führt zu vielen Fehlern.

Mit der Vorzeichenregel „Wie wirkt der Rest der Welt (RdW) auf die Baugruppe (BG)“ wirken Schwerkraft nach unten. Es käme auch zu richtigen Ergebnissen, trüge man ALLE Richtungen „falsch“ herum ein (Schwerkraft nach oben!), aber Mischen der Richtungssysteme funktioniert nie.

Bei zeichnerischen Lösungen muss man keine Richtungen für unbekannte Kräfte annehmen, es genügen die WL. Bei rechnerischen Lösungen sind die Richtungen nötig für die Vorzeichen in den Gleichungen. Wenn man eine Richtung „falsch“ angenommen hat, wird das Ergebnis negativ und es stimmt wieder.

Es sind nur 3 unbekannte Kräfte lösbar, weil nur drei Gleichgewichtsbedingungen existieren. Die Anzahl der lösbaren Unbekannten reduzieren sich, wenn nicht alle Gleichungen angewendet werden können, z.B. beim zentralen Kräftesystem (kein Momentengleichgewicht) oder wenn alle Kräfte parallel sind (Kräftegleichgewicht nur in einer Richtung). Wenn man mehr unbekannte Kräfte findet als lösbar sind, muss man weitere Informationen suchen. Ein Lösungsversuch ohne zusätzliche Infos ist sinnlos.

Das Freimachen ist oft der schwierigste Teil einer Statikaufgabe, deshalb gebe ich für eine lesbare LS bereits 1/4 bis 1/3 der Punkte. Umgekehrt gibt es ohne LS nie die volle Punktzahl. Lösungen in der Statik sind komplex und die Fehlerquote steigt stark an, wenn man wesentliche Lösungsschritte im Kopf jongliert → LS liegt im Eigeninteresse des Schülers.

Kein TA, nur beiläufig einließen lassen

Gemeinsame Wirkungslinie ist notwendig in der Definition, damit auch gebogenen Teile als Pendelstützen gesehen werden können. Die Form der Pendelstütze spielt keine Rolle.

Wenn die Reibung berücksichtigt werden muss, ist sie gegen die Bewegungsrichtung einzu-tragen. Die Haftreibung  $F_R = \mu \cdot F_N$  ist nicht die tatsächliche Reibkraft, sondern ihr höchstmöglicher Wert. Deshalb ist die Reibkraft in aller Regel unbekannt. Meist wird die Reibung vernachlässigt.

Für die Rollreibung im Ruhezustand gilt dasselbe wie für die Haftreibung oben.

**Verschiebesatz: Wenn über eine Rolle ein Seil gelegt ist, das in beide Richtungen gleich stark zieht, spielt ihr Durchmesser „keine Rolle“.**

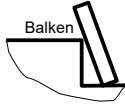
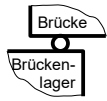


**Lose und feste Lager**

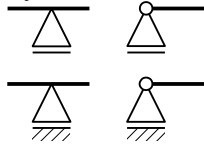
sind in allen Richtungen ( $F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z$ ) außer einer, zwei, drei beweglich:

**Einwertige Lager (Loslager)**

sind in allen Richtungen außer einer beweglich.  
konstruktive Beispiele



Symbole:

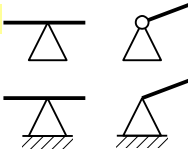


Richtung einer Drehung wird mit der Richtung der Drehachse angegeben. Da wir nur 2-D-Systeme betrachten, entfallen  $F_z, M_x$  und  $M_y$ , und Index z beim Moment.  
Wenn die Reibung ausnahmsweise berücksichtigt wird, zählt diese als Stützkraft.

Ihre Wirklinie ist eindeutig bestimmt. (einwertige Stützkkräfte bzw. Pendelstützen, Seil, usw.) sind beim Lösen von Aufgaben besonders wichtig.

**Zweiwertige Lager (Festlager)**

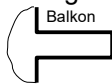
sind in allen Richtungen außer zweien beweglich.



FO Brückenlager

**Dreiwertige Lager**

sind in allen Richtungen fest.



**Vertiefung**

FTM, TG: AB Statik\_Ub\_Abi ( [Böge Aufg.] Aufgabe 9..28 sind zu leicht)



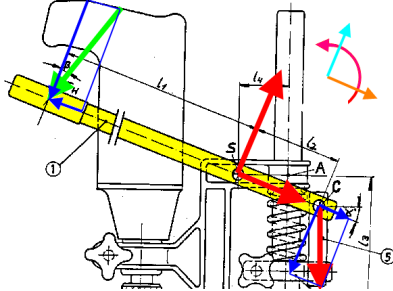
Statik II: Allgemeines Kräftesystem

**Auflagerkräfte in der Ebene berechnen**

Das grafische Schlusslinienvorgehen löst Aufgaben mit komplizierter Bemaßung leichter (→ HP 98/99-2 Zugmaschine mit Anhänger), steht aber nicht mehr im Lehrplan. rechnerische Verfahren sind flexibler, z.B. "Ab welchem ... kippt." [Skolaut 2014] S.26: „Statisches Gleichgewicht am ebenen starren Körper“ → die Einschränkungen statisch, eben und starr erfolgten schon bei der Einführung.

TG: HP 94/95-1 Bohrmaschinenständer

**Lageskizze Hebel**



Im Beispiel kann der Drehpunkt in den Bolzen S oder C liegen. Hier wird S gewählt, da von dort die Bemaßung ausgeht und dies die Rechnung ein wenig erleichtert.

$$\begin{aligned} \sum M_S = 0 \\ 0 &= F_{Hy} \cdot l_1 - F_{Cy} \cdot l_2 \rightarrow \\ F_C &= F_{Hy} \cdot \frac{l_1}{l_2 \cdot \cos \alpha} = 98,48 \text{ N} \cdot \frac{300 \text{ mm}}{90 \text{ mm} \cdot \cos 20^\circ} \\ F_C &= 349,3 \text{ N} \end{aligned}$$

**4) Hebelarme und Drehrichtung vertiefen**

Das Vorzeichen ist positiv, wenn ein Moment in der Richtung des Koordinatensystems (siehe rotes Symbol) wirkt.

Im Beispiel bekommt man den Hebelarm zu  $F_H$  zwar noch relativ leicht, aber ich will das übertragbare Verfahren zeigen.

$$\begin{aligned} F_{Hx} &= F_H \cdot \sin \beta = 100 \text{ N} \cdot \sin 10^\circ = 17,36 \text{ N} \\ F_{Hy} &= F_H \cdot \cos \beta = 100 \text{ N} \cdot \cos 10^\circ = 98,48 \text{ N} \end{aligned}$$

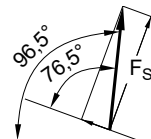
**5) Sorgfältig auf die Vorzeichen eingehen. Jede der 3 GG-Bedingungen gehört zu einer der 3 Koordinatenrichtungen.**

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 \\ 0 &= -F_{Hx} + F_{Sx} + F_{Cx} \rightarrow \\ F_{Sx} &= F_{Hx} - F_{Cx} \cdot \sin \alpha \\ F_{Sx} &= 98,48 \text{ N} - 349,3 \text{ N} \cdot \sin 20^\circ = -102,1 \text{ N} \\ \sum F_y = 0 \\ 0 &= -F_{Hy} + F_{Sy} - F_{Cy} \rightarrow \\ F_{Sy} &= F_{Hy} + F_{Cy} \cdot \cos \alpha \\ &= 17,36 + 349,3 \text{ N} \cdot \cos 20^\circ \\ F_{Sy} &= 426,7 \text{ N} \end{aligned}$$

**Wenn es ein Festlager gibt:**

$$\begin{aligned} F_S &= \sqrt{F_{Sx}^2 + F_{Sy}^2} = \sqrt{(-102,1 \text{ N})^2 + (426,7 \text{ N})^2} \\ F_S &= 438,7 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_S &= \arctan \frac{F_{Sy}}{F_{Sx}} \\ &= \arctan \frac{426,7 \text{ N}}{-102,1 \text{ N}} \\ &= -76,5^\circ \end{aligned}$$



**Vertiefung**

**Arbeitsplan**

- Freimachen + Lageskizze erstellen**
  - Baugruppe wählen (s.o.) und benennen
  - alle Kräfte eintragen (s.o.)
- Richtungen für unbekannte Kräfte annehmen (s.o.)**
  - für das Vorzeichen in Rechnungen
  - „falsche“ Annahme → negatives Ergebnis → stimmt wieder!
  - für zweiwertige Lager 2 Richtungen eintragen (z.B.  $F_x, F_y$ )
- Gleichgewichtsbedingungen ansetzen + Gleichungssystem lösen**

$$\sum M = 0 \quad \sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$

**mögliche Vereinfachungen**

- Momentengleichgewicht  $\sum M =$** 
  - Drehpunkt im Schnittpunkt zweier unbekannter Kräfte
    - eine Gleichung mit 1 Unbekannten = sofort lösbar.
  - Moment = Kraft · Hebelarm (Kraft  $\perp$  Hebelarm)

**Der Hebelarm ist der kürzeste Abstand zw. Drehpunkt und Wirklinie**

- 5 Kräfte in Bemaßungsrichtung zerlegen**
  - Nicht Hebelarme berechnen,
  - sondern Kräfte rechtwinklig zur Bemaßung zerlegen

- Hilfe: Koordinatensystem in Richtung der Bemaßung legen
- Man kann für jede Kraft ein eigenes Koordinatensystem wählen, z.B. Aufg. 4: Hebebühne
- im tatsächlichen Angriffspunkt →

**6. Kräftegleichgewichte  $\sum F_x = 0$  und  $\sum F_y = 0$**

- beliebige Reihenfolge
- $\sum F_x = 0$ : In Kräftegleichgewichten gibt es keine Hebelarme. Das Vorzeichen ist positiv, wenn eine Kraft in Richtung der x-Achse des Koordinatensystems (siehe oranges Symbol) wirkt.
- $\sum F_y = 0$ : Das Vorzeichen ist positiv, wenn eine Kraft in Richtung der y-Achse des Koordinatensystems (blau) wirkt.

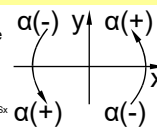
- ggf. zusätzliche Gleichungen**
  - Für jede Unbekannte eine Glchg.
  - im Abi selten, z.B. HP1983/84-2 Hebestation

- Gleichungssystem lösen**
  - per Hand oder CAS

**9. Betrag und Richtung ermitteln**

Achtung: arctan ergibt kein eindeutiges Ergebnis für  $\alpha$  (Zählrichtung von x siehe rechts), deshalb muss man den Winkel mit einer Skizze deutlich machen.

Dazu skizziert man die Komponenten  $F_{Sx}$  ( $\approx -100\text{N}$ ) und  $F_{Sy}$  ( $\approx +400\text{N}$ ) in das gewählte Koordinatensystem und überlegt dann, wo der berechnete Winkel liegt.



**10. Plausibilität prüfen**

Kompliziertere Aufgaben:  
tgme HP1983/84-2 Hebestation  
tgme NP201112-5 Saizklappe

- Statikaufgaben der Ebene löst man, indem man die 3 Gleichgewichtsbedingungen  $\sum F_x = 0$ ;  $\sum F_y = 0$  und  $\sum M = 0$  für beliebige Koordinatensysteme aufstellt und mit dem entstehenden Gleichungssystem max. 3 unbekannte Größen löst. Schon das Aufstellen der Gleichungen wird durch eine geschickte Wahl des Koordinatensystems erleichtert.
- Wenn man das Gleichungssystem händisch lösen will/muss, sollte man weitere Möglichkeiten zur Vereinfachung nutzen, z.B. einen geschickten Drehpunkt für das Momentengleichgewicht.
- Für alle Probleme der Statik ist Freimachen unverzichtbar. Zur Dokumentation genügt eine unmaßstäbliche Skizze.
- Details siehe Unterrichtseinheit "Freimachen"
- Ich lege Wert darauf, dass die gewählte Baugruppe benannt wird, a) damit ich weiß, welche BG eine Schülerin meint, und b) damit sie es auch weiß :-)
- Details siehe Unterrichtseinheit "Freimachen"
- Man muss die Richtungen nicht kennen, sondern nur annehmen und kennzeichnen. Wenn die Richtung "falsch" angenommen wurde, wird das Ergebnis der Rechnung negativ und stimmt wieder. Es ist auch nicht sinnvoll, die "falsche" Richtungen nachträglich zu korrigieren, weil man dabei die ganze Rechnung korrigieren müsste. Wer sicher gehen will, vermerkt am negativen Ergebnis: „Kraft wirkt entgegen der Annahme.“
- In zweiwertigen Lagern (=Festlager) trägt man für unbekannte Kräfte die Komponenten in x- und y-Richtung ein.

**Typ 1: Wahl des Drehpunktes**

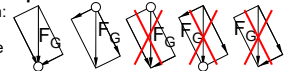
**Idee:** Wenn man den Drehpunkt für die Gleichung  $\sum M = 0$  im Schnittpunkt zweier unbekannter Kräfte wählt, haben diese Kräfte den Hebelarm 0 und fallen aus der Gleichung. Es bleibt also nur 1 Unbekannte → manuell leicht zu lösen.<sup>1</sup> Mit CAS ist dieser Schritt verzichtbar.  
**Sonstiges:** Einen solchen Schnittpunkt gibt es immer, da Aufgaben mit 3 parallelen unbekanntem Kräften nicht lösbar sind. Bisher waren in den Abi-Aufgaben diese Schnittpunkte immer bemaßt. Wenn dies nicht Fall sein sollte (z.B. [Böge Aufg.] Aufg. 120; 129.), muss man die Maße zum Schnittpunkt ermitteln oder das Gleichungssystem individuell lösen. Nicht von Kraft mal Länge o.s.ä. reden, da dies leicht mit der Arbeit verwechselt wird, aber dort sind Kraft und Weg parallel.

**Typ 2: Komponenten statt Hebelarm**

**Idee:** Zur Berechnung der Momente müssen Kraft und Hebelarme rechtwinklig zueinander stehen. Wenn dies durch die Bemaßung nicht gegeben ist, können die Hebelarme zwar berechnet werden, aber das funktioniert in jeder Aufgabe anders, ist deshalb fehleranfällig und nur in einfachen Fällen sinnvoll. Meist ist es einfacher, die Kräfte in Bemaßungsrichtung zu zerlegen und die Komponenten mit den gegebenen Längen zu multiplizieren – das Verfahren funktioniert immer gleich und kann eingeübt werden. Zwanglos funktioniert es, wenn man das Koordinatensystem in Bemaßungsrichtung legt.

**Typ 3: Kraftkomponenten skizzieren**

Es sind oft Kleingkeiten: Kräfte im Angriffspunkt zerlegen, damit man die Hebelarme, nicht verwechselt



Man könnte noch einmal  $\sum M = 0$  mit einem anderem Drehpunkt ansetzen, aber  $\sum F = 0$  ist weniger aufwändig.

Vorzeichenregel: Es bekommen die Kräfte ein negatives Vorzeichen, deren angenommenen Richtung entgegen den Koordinatenrichtungen x bzw. y wirken. Achtung: Diese Vorzeichen sind nicht die Vorzeichen des Momentengleichgewichts.

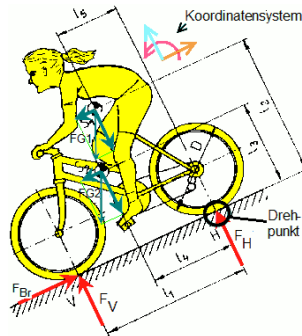
Plausibilität: Ist es plausibel, dass in  $F_C$  und  $F_S$  ca. 4x größer als  $F_H$  sind?

[Böge Aufg.] Aufg. 120; 119c  
Fachwerke ([Böge Aufg.] Aufg. 69ff) können vorläufig gelöst werden, indem man sich von Knoten zu Knoten hangelt. Sobald das allgemeine Kräftesystem behandelt ist, kann das Rittersche Schnittverfahren verwendet werden.

1 [Müller-Breslau I] S.211: „Denn wählt man den Schnittpunkt von irgend zweien der drei Spannkraften zum Drehpunkte und setzt die Summe der statischen Momente sämtlicher Kräfte gleich Null, so erhält man eine Gleichung, in der nur eine unbekannte Spannkraft vorkommt, weil die statischen Momente der durch den Drehpunkt gehenden Spannkraften gleich Null sind.“

## Übungen

Beispiel: schiefe Ebene  
z.B. HP 92/93-1 Mountainbike  
Lageskizze Rad+Fahrerin



$$F_{G1x} = F_{G1} \cdot \sin \alpha = 560 \text{ N} \cdot \sin 15,6^\circ = 151,0 \text{ N}$$

$$F_{G1y} = F_{G1} \cdot \cos \alpha = 560 \text{ N} \cdot \cos 15,6^\circ = 539,3 \text{ N}$$

$$F_{G2x} = F_{G2} \cdot \sin \alpha = 140 \text{ N} \cdot \sin 15,6^\circ = 37,7 \text{ N}$$

$$F_{G2y} = F_{G2} \cdot \cos \alpha = 140 \text{ N} \cdot \cos 15,6^\circ = 134,8 \text{ N}$$

mit  $\alpha = \arctan 28\% = 15,6^\circ$

(Dreh-)Moment = Kraft · Hebelarm (Kraft  $\perp$  Hebelarm)  
Das Vorzeichen ist positiv, wenn ein Moment in der Richtung des Koordinatensystems (siehe rotes Symbol) wirkt.

$$\Sigma M_H = 0$$

$$= \pm F_{Br} \cdot 0 - F_V \cdot l_1 \pm F_H \cdot 0$$

$$+ F_{G1x} \cdot l_2 + F_{G1y} \cdot l_5 + F_{G2x} \cdot l_3 + F_{G2y} \cdot l_4 \rightarrow$$

$$F_V = \frac{F_{G1x} \cdot l_2 + F_{G1y} \cdot l_5 + F_{G2x} \cdot l_3 + F_{G2y} \cdot l_4}{l_1}$$

$$F_V = \frac{+151,0 \cdot 1000 + 539,3 \cdot 426 + 37,7 \cdot 640 + 134,8 \cdot 575}{1044} \frac{\text{N} \cdot \text{mm}}{\text{mm}}$$

$$F_V = 462 \text{ N}$$

In Kräftegleichgewichten gibt es keine Hebelarme.  
Das Vorzeichen ist positiv, wenn eine Kraft in Richtung der x-Achse des Koordinatensystems (siehe oranges Symbol) wirkt.

$$\Sigma F_x = 0$$

$$= +F_{Br} - F_{G1x} - F_{G2x} \rightarrow$$

$$F_{Br} = F_{G1x} + F_{G2x}$$

$$= 151,0 \text{ N} + 37,7 \text{ N} = 189 \text{ N}$$

Das Vorzeichen ist positiv, wenn eine Kraft in Richtung der y-Achse des Koordinatensystems (siehe blaues Symbol) wirkt.

$$\Sigma F_y = 0$$

$$= F_V - F_{G1y} - F_{G2y} + F_H \rightarrow$$

$$F_H = -F_V + F_{G1y} + F_{G2y}$$

$$= -462,0 \text{ N} + 539,3 \text{ N} + 134,8 \text{ N}$$

$$= 212 \text{ N}$$

Beispiel: mit Zusammensetzen

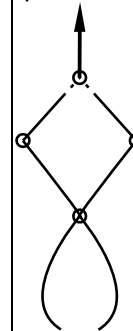
Beispiel: HP 83/84-2 Hebestation  
Beispiel Kippaufgabe

FTM

72-82: Resultierende mit Abstand weglassen  
83-97: Lagerkräfte (einstufig)  
98ff Lagerkräfte (mehrstufig)

Warum Algorithmen? Die Stärke des Menschen ist es eigentlich, sich auf **neue** Probleme einzustellen, während wiederkehrende Spezialaufgaben wie Fliegen fangen besser von Fröschen beherrscht werden [Ganten 2003]. Das sollte auch Schule fördern, also Vielseitigkeit verlangen statt stumpfsinniger Tätigkeiten. Dem gegenüber steht, dass Ingenieure meist Standardprobleme mit Standardmethoden bearbeiten. Und Schüler können in einer 4,5-stündigen Abi-Prüfung nicht dauernd hochkonzentriert arbeiten und brauchen Lösungsmethoden, die eine reduzierte Hirnleistung vertragen: Also doch Algorithmen.

Spreizzange zum Heben von Steinquadern



Statik\_TA\_allgemein-rechnerisch-Auflager.odt  
Klassenarbeit Statik II

## Wiederholung

Wiederholung Statik → ME

### Nicht explizit unterrichten

#### Notizen

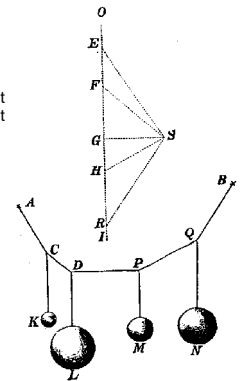
nicht unterrichten, zusätzliche Info

Carl Culmann (1821-1861)

Quellen: [Kurrer 2002]

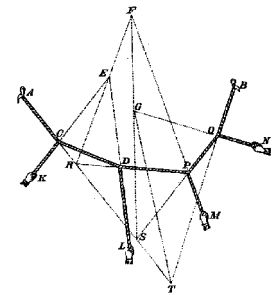
Pierre de Varignon (1654–1722)

P.Varignon führte in seinem 1725 posthum veröffentlichten Werk *Nouvelle Mécanique ou Statique* das Seil- und Kräftepolygon ein. Ein undeformbares, masseloses Seil bestimmter Länge wird an den Punkten A und B aufgehängt und durch die Gewichte K, L, M und N belastet (Bild 6-10). Die sich einstellende Gleichgewichtslage ACDPQB des Seiles wird als Seilpolygon bezeichnet; es wird durch das Kräftepolygon SEFGHRI festgelegt. Das Kräftepolygon ist eine Aneinanderreihung von Kräfte-dreiecken, mit denen nacheinander das Gleichgewicht in den Seilknoten C, D, P und Q erfüllt wird; beispielsweise erfüllt das Kräfte-dreieck SEF das Gleichgewicht im Seilknoten C. Varignon gibt auch die Konstruktion eines Seilpolygons mit beliebig gerichteten Kräften an. Bis auf Poncelet, der in seinen Vorträgen an der Artillerie- und Genieschule in Metz das Seilpolygon für Schwerpunktbestimmungen verwandte, blieb die Anwendung des Seilpolygons auf die Ermittlung von Gleichgewichtslagen von Zug- und Druckgliedern - etwa bei Hängebrücken und Wölbkonstruktionen – beschränkt.  
aus [Kurrer 2002] S.223, [Varignon 1725] Band 1, S.190



Wie kommt man auf den Punkt S?

Zusammenhang mit Schlusslinien- bzw. Seileckverfahren ? Nachvollziehen !

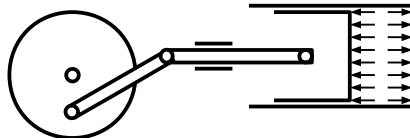


Seil- und Kräftepolygon nach Varignon (1725)

Konrad Zuse (1910-1995)

„Zuse verallgemeinert dieses noch an der Stabstatik orientierte Rechenschema zum Verfahren des Rechenplanes oder Programms. Sein Rechenplan bildete den Aufpunkt für die erste lauffähige programmgesteuerte Rechenmaschine der Welt, der 1941 realisierten Zuse Z3.... In der Computerstatik bleibt das Rechnen außen vor: Der Bauingenieur kann Symbolketten transformieren und manipulieren, ohne auf die Bedeutung der Symbole angewiesen zu sein. ... Man könnte sogar sagen, daß durch die graphische Statik Culmanns die Entwurfsarbeit des Bauingenieurs nicht nur rationalisiert sondern gleichzeitig ästhetisiert wurde, treten doch die Kräfte- und Konstruktionspläne in der doppelten Gestalt sowohl des sinnlichen Bewußtseins als auch des sinnlichen Bedürfnisses auf. Jene Entwicklung erreichte in den 1880er und 1890er Jahren ihren Höhepunkt; prominentes Beispiel hierfür ist der mit Methoden der graphischen Statik durch den Culmann-Schüler Koechlin analysierte Eiffelturm.“ [Kurrer 2002] S452f

Fragen  
Verhältnisse bei stehendem Zylinder

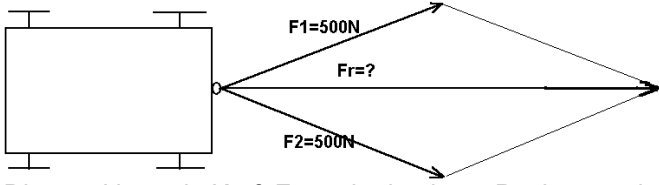


[Müller-Breslau III] S.19 berechnet das maximale Moment  $m_{max}M (!)$  mit der Polweite H (in Tonnen!), die grafische Darstellung ähnelt der des Schlusslinien- bzw. Seileckverfahrens mit Pol - Nachvollziehen

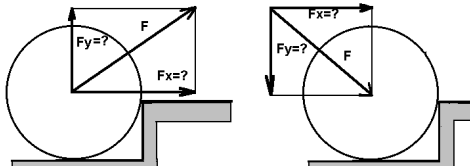


Grundoperationen der Statik

1. Kräfteparallelogramm



Die resultierende Kraft Fr zweier in einem Punkt angreifender Kräfte ist die Diagonale des aus beiden Kräften gebildeten Parallelogramms



2. Längsverschiebung



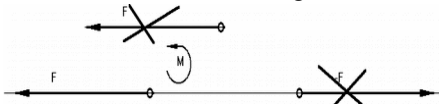
Kräfte können auf ihren Wirklinien frei verschoben werden.

3. Erweiterungssatz



Zwei gleich große, gegensinnige, auf gleicher Wirklinie liegende Kräfte können zu einem Kräftesystem hinzugefügt oder von ihm fortgenommen werden, ohne dass sich die Wirkung des Kräftesystems ändert.

4. Parallelverschiebung



Eine Kraft darf auf eine parallele Wirklinie verschoben werden, wenn ein Moment M = Kraft x Verschiebearm hinzugefügt wird (Versatzmoment).

(Kraft-)Moment einer Einzelkraft

ist das Produkt aus Kraft und Wirkabstand (rechtwinklig zur Kraft gemessen)

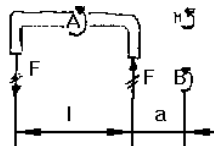
Definition

- (+) = linksdrehend
(-) = rechtsdrehend

Kräftepaare

bestehen aus zwei gleich großen, parallelen, entgegengesetzt wirkenden Kräften. Sie drehen einen freibeweglichen Körper ohne ihn zu verschieben.

z.B. Fahrradlenker



A: M = F \* l/2 + F \* l/2 = F \* l

B: M = F \* (l + a) - F \* a = F \* l

Das Drehmoment eines Kräftepaars ist an jedem Ort der Ebene gleich und kann deshalb beliebig in der Ebene verschoben werden.

MVK, FTM, TG: nicht unterrichten, nur beiläufig einbringen

Oben wurden schon einige „Rechenregeln“ für Kräfte eingesetzt. Welche weiteren sind bekannt?

Wie der folgende Verschiebesatz vom Meister selbst als Axiom eingeführt (Sir Isaac Newton 1643-1727) [4].

Analytische Berechnung:

- 1 Zerlegen der Kräfte in x- und y-Komponenten F1x, F1y, F2x und F2y
2 addieren der Komponenten Frx=F1x+F2x, Fry analog

Fr = sqrt(Frx^2 + Fry^2); alpha = arctan(Fry/Frx

3 Vektorielle Berechnung ist einfacher, da die Komponenten Fx und Fy explizit vorliegen:

Resultierende Kraft ist diejenige gedachte Ersatzkraft, die dieselbe Wirkung auf einen Körper ausübt wie die Einzelkräfte F1, F2 .., zusammen.

Fv = F1 + F2 = [F1x, F1y] + [F2x, F2y] = [F1x + F2x, F1y + F2y]

Kräfte müssen, wie alle Vektoren, unter Berücksichtigung ihres Betrages, ihrer Wirklinie und ihrer Richtung addiert werden. Anwendung und Übung siehe unten

Zur Verdeutlichung der Kraftvektoren, ihrer Zerlegung und Zusammensetzung: Umgekehrt geht es auch, Anwendung später.

Auf der Ebene macht es ohne Reibung keinen Unterschied, ob man den Kinderwagen schiebt oder zieht. Am Randstein weiß jeder aus Erfahrung, dass Ziehen günstiger ist. Im Bild erkennt man, dass die aufwärts gerichtete Komponente F, dem Wagen über den Randstein hilft. Tatsächlich ist auch auf der Ebene das Ziehen günstiger, weil es den Wagen entlastet und die Reibung vermindert. Trotzdem schiebt man Kinderwagen wegen des Blickkontaktes zum Kind und weil man sich abstützen kann.

In [Böge Technologie] und im LPE sind der Verschiebe- und der Erweiterungssatz in der Reihenfolge vertauscht.

AM Metallstab, Gummiband schieben und ziehen

Erkenntnis: für starre Körper ist es belanglos, ob eine Kraft „vorne“ oder „hinten“ einfließt (z.B. Heck- oder Frontantrieb). Bei nicht starren Körpern ergeben sich Änderungen (z.B. Krafteingriff in Gewinden, Gummiband unter dem Einfluss von Druckkraft und Reibung). Andere Veränderungen wie Stabilität sind nicht Thema der Statik, siehe Definition.

Folgt aus den Axiomen Parallelogramm und Längsverschiebung.

Welches F, haben diese beiden betragsmäßig gleich großen Kräfte?

Fr = 0, deshalb kann es in jedes System eingesetzt werden.

„Auf gleicher Wirklinie“ folgt aus dem Längsverschiebungssatz.

Folgt aus den vorigen Axiomen und der Momentengleichung.

Vorgehensweise:

- 1 Kraft F oben eintragen
2 Kraft F und -F unten eintragen (Erweiterungssatz)
3 Moment einsetzen, ursprüngliche Kraft F und -F streichen.

Wird die Kraft auf ihrer Wirklinie ersetzt, entsteht kein Moment (Längsverschiebesatz).

Das Versatzmoment wirkt an jeder Stelle des Körpers

siehe oben, Kräftepaar am Beispiel Fahrradlenker.

Ültg: Tisch seitlich schieben: welche Wirkung von Kräften muss man auch in der Statik berücksichtigen?

Betrag und Richtung eines Momentes hängt von der Kraft und dem Bezugspunkt ab. Einheit Newtonmeter [Nm], nicht zu verwechseln mit Joule J=Nm: beim Drehmoment stehen Kraft und Weg rechtwinklig, bei der Arbeit parallel zueinander.

Die Richtung der Drehachse steht senkrecht auf der von Kraft und Hebelarm aufgespannten Ebene. In unserem Fall ist sie die z-Achse und kommt aus der Ebene heraus. Es gilt die

Rechtehandregel: Daumen der rechten Hand in Richtung der Drehachse, und die Finger weisen in positiver Drehrichtung.

Ültg: Schüler sollen einen Gegenstand mit einer Kraft drehen.

Geht nicht, immer ist Reibung, Gravitation, Trägheit oä. im Spiel.

Einzelkräfte bewirken keine Drehung. Ohne Reibung, Lager o.ä. würden sie nur eine Verschiebung bewirken.

Wird durch je zwei kurze Striche gekennzeichnet (wie parallele Linien)

Die Differenz der Hebelarme ist an jedem Punkt gleich, deshalb ist das Drehmoment an jedem Punkt gleich. Da die Kräfte sich ansonsten aufheben, kann dieses Kräftepaar durch jedes andere mit gleichem Drehmoment ersetzt werden.

Ein Kräftepaar kann durch ein anderes ersetzt werden, wenn beide das gleiche Drehmoment haben, z.B. doppelter Betrag und halber Abstand; gleiche Kräfte in anderer Ausrichtung.