



1) Übliche Bezeichnungen

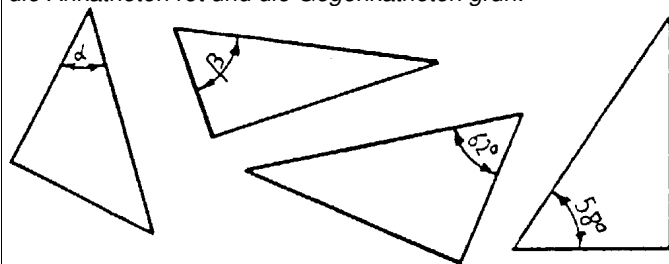
Bezeichnungen:

In Dreiecken benennt man Seiten mit den lat. Buchstaben a, b und c, und die jeweils gegenüberliegenden Winkel mit den griech. Buchstaben α (alpha, ggü. a), β (beta, ggü. b) und γ (gamma, ggü. c).

Für rechtwinklige Dreiecke gilt:

Die Hypotenuse c ist die längste Seite und liegt gegenüber dem rechten Winkel. Die beiden kürzeren Seiten a und b heißen Katheten und bilden die Schenkel des rechten Winkels. Vom Winkel α aus gesehen ist a die Gegenkathete und b die Ankathete. Vom Winkel β aus gesehen ist b die Gegenkathete und a die Ankathete.

Tragen Sie die Bezeichnungen in die Dreiecke ein, und markieren Sie, ausgehend von den bezeichneten Winkeln, die Ankatheten rot und die Gegenkatheten grün.



2) Winkelsumme

Regel:

In Dreiecken beträgt die Summe aller Winkel 180°

Nutzen:

Wenn man zwei Winkel eines rechtwinkligen Dreieckes kennt, kann man den dritten Winkel berechnen.

Grundformel:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Abgeleitete Formeln für rechtwinklige Dreiecke:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \quad \alpha = 90^\circ - \beta \quad \beta = 90^\circ - \alpha$$

3) Satz des Pythagoras

Regel:

Wenn man die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes quadriert, so ist die Fläche der beiden Quadrate zusammen genauso groß wie das Quadrat der Hypotenuse.

Nutzen:

Wenn man zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes kennt, kann man die dritte Seite berechnen.

Grundformel:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Abgeleitete Formeln:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

4) Seitenverhältnisse = Winkelfunktionen

Regel:

Die Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes stehen in bestimmten Verhältnissen zueinander, die nur von den Winkeln abhängen. Die Verhältnisse kann man vom Taschenrechner oder aus dem Tabellenbuch entnehmen.

Nutzen:

- 1) Wenn man eine Seiten und einen Winkel eines rechtwinkligen Dreieckes kennt, kann man die fehlenden Seiten berechnen.
- 2) Wenn man zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes kennt, kann man die fehlenden Winkel berechnen.

Grundformeln:

Sinus: $\sin[\text{Winkel}] = \text{Verhältnis} \left[\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \right]$ z.B. $\sin \alpha = \frac{a}{c}$

Cosinus: $\cos[\text{Winkel}] = \text{Verhältnis} \left[\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \right]$ z.B. $\cos \alpha = \frac{b}{c}$

Tangens: $\tan[\text{Winkel}] = \text{Verhältnis} \left[\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \right]$ z.B. $\tan \alpha = \frac{a}{b}$

Abgeleitete Formeln für rechtwinklige Dreiecke:

- 1) $a = c \cdot \sin \alpha = c \cdot \cos \beta = b \cdot \tan \alpha = b \cdot \cot \beta$
 $b = c \cdot \sin \beta = c \cdot \cos \alpha = a \cdot \tan \beta = a \cdot \cot \alpha$
 $c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a}{\cos \beta} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{b}{\cos \alpha}$
- 2) $\alpha = \arcsin \left[\frac{a}{c} \right] = \arccos \left[\frac{b}{c} \right] = \arctan \left[\frac{a}{b} \right]$
 $\beta = \arcsin \left[\frac{b}{c} \right] = \arccos \left[\frac{a}{c} \right] = \arctan \left[\frac{b}{a} \right]$

5) Übungen: Ergänzen Sie die fehlenden Werte in den Dreiecken möglichst direkt aus den angegebenen Werten.

	Dreieck 1	Dreieck 2	Dreieck 3	Dreieck 4	Dreieck 5
Kathete a		30 mm		747 mm	760 mm
Kathete b		40 mm			
Hypotenuse c	62 mm		350 mm		
Winkel α	55°				$42^\circ 40'$
Winkel β			50°	$17,67^\circ$	
Winkel γ	90°	90°	90°	90°	90°

6) Zusammenfassung

Kennt man in einem rechtwinkligen Dreieck zwei Seiten oder eine Seite mit einem Winkel, so kann man alle fehlenden Größen berechnen.



Lösungen

1) Übliche Bezeichnungen

Bezeichnungen:

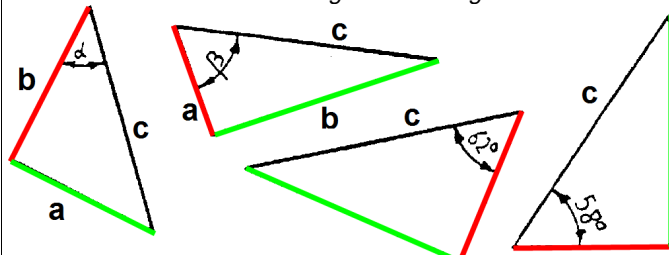
In Dreiecken benennt man Seiten mit den lat. Buchstaben a, b und c, und die jeweils gegenüberliegenden Winkel mit den griech. Buchstaben α (alpha, ggü. a), β (beta, ggü. b) und γ (gamma, ggü. c).

Für rechtwinklige Dreiecke gilt:

Die Hypotenuse c ist die längste Seite und liegt gegenüber dem rechten Winkel. Die beiden kürzeren Seiten a und b heißen Katheten und bilden die Schenkel um den rechten Winkel.

Vom Winkel α aus gesehen ist a die Gegenkathete und b die Ankathete. Vom Winkel β aus gesehen ist b die Gegenkathete und a die Ankathete.

Tragen Sie die Bezeichnungen in die Dreiecke ein, und markieren Sie, ausgehend von den bezeichneten Winkeln, die Ankatheten rot und die Gegenkatheten grün.



2) Winkelsumme

Regel:

In Dreiecken beträgt die Summe aller Winkel 180°

Nutzen:

Wenn man zwei Winkel eines rechtwinkligen Dreieckes kennt, kann man den dritten Winkel berechnen.

Grundformel:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Abgeleitete Formeln für rechtwinklige Dreiecke:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \quad \alpha = 90^\circ - \beta \quad \beta = 90^\circ - \alpha$$

3) Satz des Pythagoras

Regel:

Wenn man die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes quadriert, so ist die Fläche der beiden Quadrate zusammen genauso groß wie das Quadrat der Hypotenuse.

Nutzen:

Wenn man zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes kennt, kann man die dritte Seite berechnen.

Grundformel:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Abgeleitete Formeln:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

4) Seitenverhältnisse = Winkelfunktionen

Regel:

Die Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes stehen in bestimmten Verhältnissen zueinander, die nur von den Winkeln abhängen. Die Verhältnisse kann man vom Taschenrechner oder aus dem Tabellenbuch entnehmen.

Nutzen:

- 1) Wenn man eine Seiten und einen Winkel eines rechtwinkligen Dreieckes kennt, kann man die fehlenden Seiten berechnen.
- 2) Wenn man zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes kennt, kann man die fehlenden Winkel berechnen.

Grundformeln:

Sinus: $\sin[\text{Winkel}] = \text{Verhältnis} \left[\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \right]$ z.B. $\sin \alpha = \frac{a}{c}$

Cosinus: $\cos[\text{Winkel}] = \text{Verhältnis} \left[\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \right]$ z.B. $\cos \alpha = \frac{b}{c}$

Tangens: $\tan[\text{Winkel}] = \text{Verhältnis} \left[\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \right]$ z.B. $\tan \alpha = \frac{a}{b}$

Abgeleitete Formeln für rechtwinklige Dreiecke:

1) $a = c \cdot \sin \alpha = c \cdot \cos \beta = b \cdot \tan \alpha = b \cdot \cot \beta$
 $b = c \cdot \sin \beta = c \cdot \cos \alpha = a \cdot \tan \beta = a \cdot \cot \alpha$

$$c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a}{\cos \beta} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{b}{\cos \alpha}$$

2) $\alpha = \arcsin \left[\frac{a}{c} \right] = \arccos \left[\frac{b}{c} \right] = \arctan \left[\frac{a}{b} \right]$
 $\beta = \arcsin \left[\frac{b}{c} \right] = \arccos \left[\frac{a}{c} \right] = \arctan \left[\frac{b}{a} \right]$

5) Übungen: Ergänzen Sie die fehlenden Werte in den Dreiecken möglichst direkt aus den angegebenen Werten.

	Dreieck 1	Dreieck 2	Dreieck 3	Dreieck 4	Dreieck 5
Kathete a	$62 \cdot \sin 55^\circ = 50,8 \text{ mm}$	30 mm	$350 \cdot \cos 50^\circ = 225 \text{ mm}$	747 mm	760 mm
Kathete b	$62 \cdot \cos 55^\circ = 35,6 \text{ mm}$	40 mm	$350 \cdot \sin 50^\circ = 268 \text{ mm}$	$747 \cdot \tan 17,67^\circ = 238 \text{ mm}$	$824,6 \text{ mm} = \frac{760 \text{ mm}}{\tan \alpha}$
Hypotenuse c	62 mm	$50 \text{ mm} = \sqrt{30^2 + 40^2} \text{ mm}$	350 mm	$784 \text{ mm} = \frac{747 \text{ mm}}{\cos \beta}$	$1121,5 \text{ mm} = \frac{760 \text{ mm}}{\sin \alpha}$
Winkel α	55°	$36,9^\circ = \arctan \frac{30 \text{ mm}}{40 \text{ mm}}$	$90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$	$90^\circ - 17,67^\circ = 72,33^\circ$	$42^\circ 40' = 42,66^\circ$
Winkel β	$90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$	$53,1^\circ = \arctan \frac{40 \text{ mm}}{30 \text{ mm}}$	50°	$17,67^\circ$	$47^\circ 20' = 47,33^\circ$
Winkel γ	90°	90°	90°	90°	90°

6) Zusammenfassung

Kennt man in einem rechtwinkligen Dreieck zwei Seiten oder eine Seite mit einem Winkel, so kann man alle fehlenden Größen berechnen.