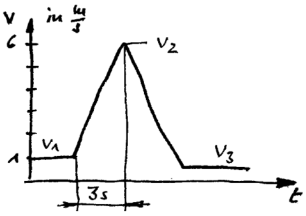
Quelle der Aufgaben: Alfred Böge / Walter Schlemmer: Aufgabensammlung Technische Mechanik, Vieweg+Teubner, Ausgaben ziemlich identisch seit mind. 1999

I Lösungsvorschläge

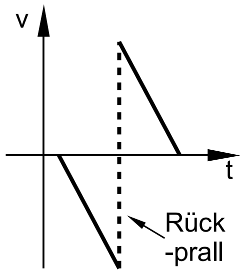
Es handelt sich um Lösungsvorschläge. In der Regel sind auch viele andere Lösungen möglich.

Übungen mit dem s,t- und *v,t*- und a,t-Diagramm

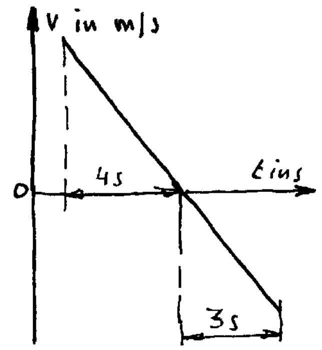
400



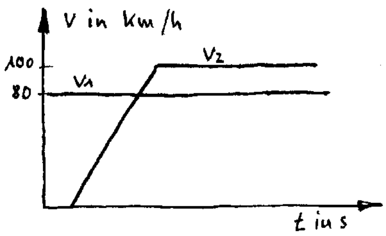
401



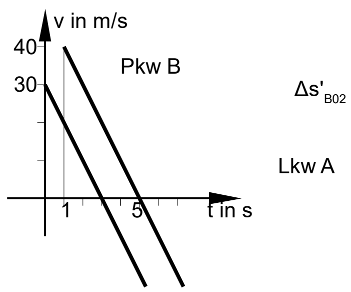
402



403



404



Steigzeit:

$v = a \cdot t$

$t_1 = \frac{v_1}{a} = \frac{30\,\frac{m}{s}}{10\,\frac{m}{s^2}} = 3\mathrm{s}$

$t_2 = \ldots = 4\mathrm{s}$

Gleichförmig geradlinige Bewegung

405 1 Seemeile = 1sm = 1NM = 1 Nautische Meile
1sm = 1852m ([EuroTabM] „Längen, Einheit“)
= 1 Winkelminute auf dem Äquator

$$t = 7\mathrm{d}19\mathrm{h}12\mathrm{min} = 7 \cdot 24\mathrm{h} + 19\mathrm{h} + 12 \cdot \frac{h}{60} = 187{,}2\,h$$

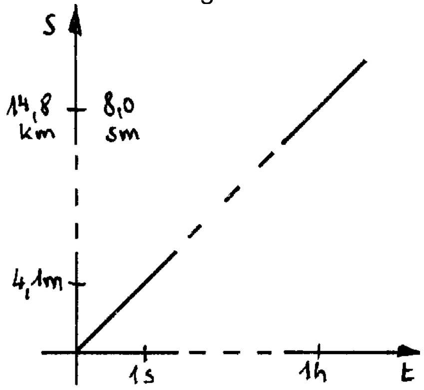
$$s = 1500\mathrm{sm} = 1500 \cdot 1{,}852\,km = 2778\,km$$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{1500\,sm}{187{,}2\,h} = 8{,}0\,kn$$

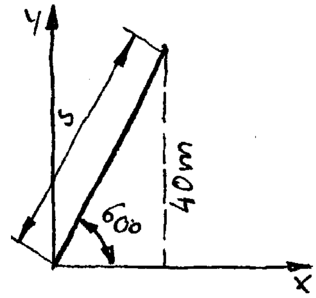
$$= \frac{2778\,km}{187{,}2\,h} = 14{,}8\,\frac{km}{h}$$

$$= \frac{2778 \cdot 1000\,m}{187{,}2 \cdot 3600\,s} = 4{,}12\,\frac{m}{s}$$

Grafische Lösung:



406



$$\sin 60° = \frac{GK}{HY} = \frac{40\mathrm{m}}{s} \rightarrow s = \frac{40\,m}{\sin 60°} = 46{,}188\,m$$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{46{,}188\,m}{0{,}75\,min} = \frac{46{,}188\,m}{0{,}75 \cdot 60\,s} = 1{,}026\,\frac{m}{s}$$

407 Gleichung (1):

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{92\,m}{138\,s} = 0{,}667\,\frac{m}{s}$$

$$= 0{,}667\,\frac{m}{\frac{min}{60}} = 0{,}667\,\frac{m \cdot 60}{min} = 40\,\frac{m}{min}$$

408 Gleichung (1):

$$t = \frac{\Delta s}{\Delta v} = \frac{1{,}5 \cdot 10^6\,km}{2{,}998 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}} = \frac{1{,}5 \cdot 10^6 \cdot 10^3\,m}{2{,}998 \cdot 10^8\,m} \cdot s = 5{,}003\,s$$

Hinweis: Für den „Alltagsgebrauch“ kann man sich die Lichtgeschwindigkeit merken mit $c = 300'000\,\frac{km}{s}$.

409

a) Gleichung (1):

$$v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{1\,m}{12\,m}=0{,}0833\,\frac{m}{min}$$

b) Gleichung (1):

$$t=\frac{\Delta s}{\Delta v}=\frac{3{,}75\,m}{0{,}833\,\frac{m}{min}}=45\,min=2700\,s$$

410 Lösungsmöglichkeit I
mit Formeln aus [EuroTabM] „Geschwindigkeit":

Rohrquerschnitt

$$A=\frac{\pi\cdot d^2}{4}=\frac{\pi\cdot(400\text{mm})^2}{4}=\frac{\pi\cdot(0{,}1\,m)^2}{4}=0{,}1257\,m^2$$

Länge der Ölsäule einer Stunde

$$V=l\cdot A \quad\rightarrow\quad l=\frac{V}{A}=\frac{480000\,dm^3}{0{,}127\,m^2}=3819{,}7\,m=\Delta s$$

Geschwindigkeit des Öls

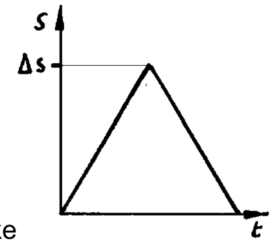
$$v=\frac{\Delta l}{\Delta t}=\frac{3819{,}7\,m}{1\,h}=\frac{3819{,}7\,m}{3600\,s}=1{,}061\,\frac{m}{s}$$

Lösungsmöglichkeit II
mit Formeln aus [EuroTabM] „Hydraulik":
Mit Strom bezeichnet man Mengen, die je Zeiteinheit fließen, z.B. elektrischer Strom I, Verkehrsstrom, Leistung P (=Energiestrom) usw. Ströme werden oft mit einem Punkt auf dem Formelzeichen der Menge gekennzeichnet, z.B. Massenstrom $\dot{m}=\frac{\Delta m}{\Delta t}$ oder Volumenstrom $\dot{V}=\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{A\cdot\Delta s}{\Delta t}=A\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}=A\cdot v=Q$.
Achtung Fallstrick: Verwechseln Sie nicht das kleine v (Geschwindigkeit) mit dem großen V (Volumen).

$$Q=A\cdot v \quad\rightarrow$$

$$v=\frac{Q}{A}=\frac{480000\,\frac{l}{h}}{0{,}1257\,m^2}=\frac{480\,m^3}{0{,}1257\,m^2\cdot 3600\text{s}}=1{,}06\,\frac{m}{s}$$

411 Gleichung (1) mit (14):



$$\Delta s=v\cdot\Delta t=\frac{v\cdot\Delta t}{2}$$

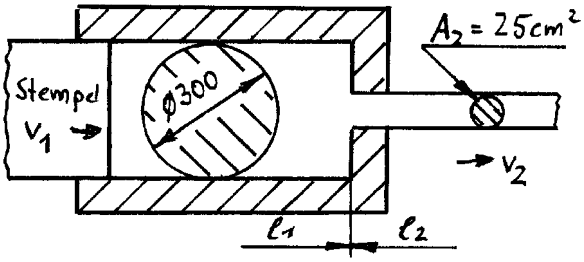
$$=300000\,\frac{km}{s}\cdot 200\,\mu\text{s}$$

$$=3\cdot 10^5\,km\cdot 200\cdot 10^{-6}=60\,km$$

Da die Radarwellen die Strecke Δs zweimal durchlaufen, beträgt die Entfernung:

$$\frac{\Delta s}{2}=\frac{60\,km}{2}=30\,km$$

412



$$A_1=\frac{\pi\cdot d^2}{4}=\frac{\pi\cdot(300\text{mm})^2}{4}=0{,}07069\,m^2$$

$$V=A_1\cdot l_1=0{,}07069\,m^2\cdot 0{,}6\,m=0{,}04241\,m^3$$

a)

$$l_2=\frac{V}{A_2}=\frac{l_1\cdot A_1}{A_2}=0{,}6\,m\cdot\frac{706{,}9\,cm^2}{25\,cm^2}=16{,}965\,m$$

b)

$$t=\frac{l_2}{v_2}=\frac{16{,}965\,m}{1{,}3\,\frac{m}{min}}=13{,}05\,min$$

c)

$$v_1=\frac{l_1}{t}=\frac{600\,mm}{13{,}05\,min}=0{,}046\,\frac{m}{min}$$

oder

$$Q=\dot{V}=A_1\cdot v_1=A_2\cdot v_2 \quad\rightarrow$$

$$v_1=v_2\cdot\frac{A_2}{A_1}=1{,}3\,\frac{m}{min}\cdot\frac{25\,cm^2}{706{,}9\,cm^2}=0{,}046\,\frac{m}{min}$$

413 Wenn der Draht durch einen Ziehring gezogen wird, muss sich seine Geschwindigkeit v im gleichen Maß erhöhen wie sich sein Querschnitt A reduziert.
Diesen Zusammenhang drückt die Gleichung für den Volumenstrom $\dot{V}$ aus:

$$Q=\dot{V}=A_1\cdot v_1=A_2\cdot v_2=A_3\cdot v_3$$

Die Gleichung kann man verwenden:

$$\frac{v_1}{A_1}=\frac{v_2}{A_2} \quad\rightarrow$$

$$v_2=v_1\cdot\frac{A_1}{A_2}=v_1\cdot\frac{\frac{\pi\cdot d_1^2}{4}}{\frac{\pi\cdot d_2^2}{4}}$$

$$=v_1\cdot\frac{d_1^2}{d_2^2}=2\,\frac{m}{s}\cdot\frac{2{,}5^2\,mm^2}{2^2\,mm^2}=3{,}125\,\frac{m}{s}$$

$$v_3=v_1\cdot\frac{d_1^2}{d_3^2}=2\,\frac{m}{s}\cdot\frac{2{,}5^2\,mm^2}{1{,}6^2\,mm^2}=4{,}883\,\frac{m}{s}$$

414

a)

$$V=\frac{m}{\rho}=\frac{60\,t}{7{,}85\,\frac{kg}{dm^3}}=\frac{60\,t}{7{,}85\,\frac{t}{m^3}}=7{,}643\,m^3$$

$$l=\frac{V}{A}=\frac{7{,}643\,m^3}{0{,}110^2\,m^2}=634{,}7\,m=\Delta s$$

b) Gleichung (1):

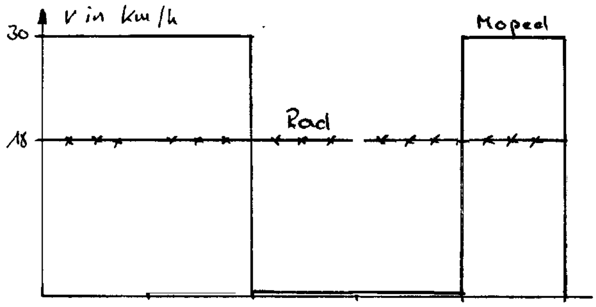
$$v=\frac{\Delta s}{8\cdot\Delta t}=\frac{631{,}7\,m}{8\cdot 50\,min}=1{,}58\,\frac{m}{min}$$

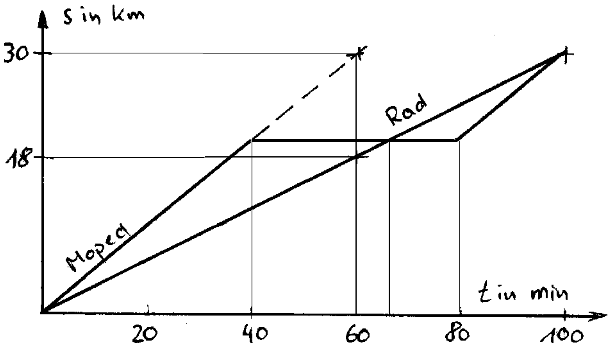
oder

$$Q=\dot{V}=8\cdot A\cdot v=\frac{V}{t} \quad\rightarrow$$

$$v=\frac{\dot{V}}{8\cdot A}=\frac{V}{t\cdot 8\cdot A}=\frac{7{,}643\,m^3}{50\,min\cdot 8\cdot(0{,}11\,m)^2}=1{,}58\,\frac{m}{min}$$

415





a)

$$t_{Rast,M}=\frac{s_{Rast}}{v_M}=\frac{20\,km}{30\,km/h}=0{,}667\,h=40\,min$$

b)

$$t_{Rast,F}=\frac{s_{Rast}}{v_F}=\frac{20\,km}{18\,km/h}=1{,}111\,h=1\text{h}\,6\text{min}\,40\text{s}$$

c)

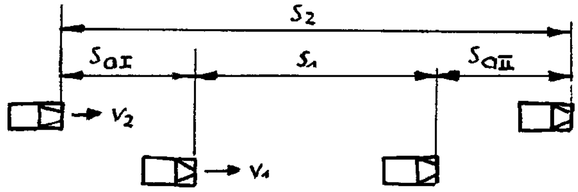
$$t_{Fahrt,M}=\frac{s_{ges}}{v_M}=\frac{30\,km}{30\,km/h}=1\,h$$

$$t_{ges,F}=\frac{s_{ges}}{v_F}=\frac{30\,km}{18\,km/h}=1{,}667\,h=1\text{h}\,40\text{min}$$

$$\Delta t_{Rast,M}=t_{ges,F}-t_{Fahrt,M}=1{,}667\,h-1\,h=0{,}667\,h=40\,min$$

Der Mopedfahrer kann so lange rasten, wie seine Fahrtzeit ggü. dem Radfahrer kürzer ist, also insgesamt 40 min. Davon hat er 26min 40s auf den Radfahrer gewartet, kann nach dessen Ankunft bzw. Vorbeifahrt also noch 13min 20s bleiben.

416



Lösungsmöglichkeit 1

Wenn man den Überholvorgang von außen betrachtet, kann man die einzelnen Gleichungen (1), (2) und (3) aus den Geschwindigkeiten v, den Fahrwegen s und den Aufholwegen s_a aufstellen und anschließend das Gleichungssystem lösen:

$$s_1=v_1\cdot t \qquad (1)$$

$$s_2=v_2\cdot t \qquad (2)$$

$$s_2=s_{aI}+s_1+s_{aII} \qquad (3)$$

(1),(2) in (3):

$$v_2\cdot t=v_1\cdot t+s_{aI}+s_{aII}$$

$$t\cdot v_2-t\cdot v_1=s_{aI}+s_{aII}$$

$$t\cdot(v_2-v_1)=s_{aI}+s_{aII}$$

$$t=\frac{s_{aI}+s_{aII}}{v_2-v_1}$$

Darin Zahlen eingesetzt:

$$t=\frac{s_{aI}+s_{aII}}{v_2-v_1}=\frac{50\,m+50\,m}{(35-30)\frac{km}{h}}=\frac{100\text{m}}{5000\text{m}}\cdot 3600\text{s}=72\,s$$

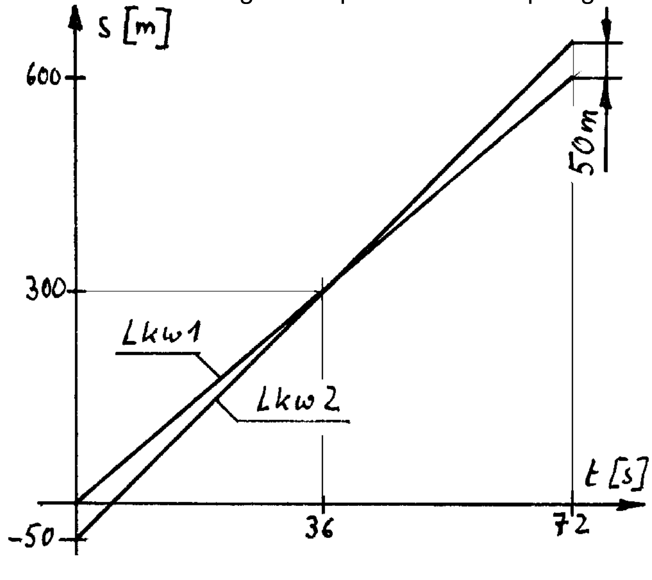
Lösungsmöglichkeit 2:

Mit einem Trick kann man die Rechnungen vereinfachen: Betrachten Sie den Überholvorgang aus dem überholten Fahrzeug. Dann steht das überholte Fahrzeug still, der Überholende fährt mit v = 5 km/h und muss insgesamt s_a = 100m Aufholweg zurücklegen.

$$v=\frac{s}{t} \quad\rightarrow\quad t=\frac{s}{v}=\frac{100\text{m}}{5\,km/h}=\frac{100\text{m}}{5000\text{m}}\cdot 3600\text{s}=72\,s$$

Lösungsmöglichkeit 3 (grafisch):

Die Geschwindigkeiten der Lkw sind durch die Steigungen der Geraden dargestellt: In 36s (=1/100 h) legen sie 300 m (=1/100 von 30 km) bzw. 350 m (=1/100 von 35 km). Lkw 2 startet 50 m hinter Lkw 1, überholt und erlangt 72 s später 50 m Vorsprung.



Gleichförmig beschleunigte Bewegung

Mit den Lösungen zu den Aufgaben 417 bis 432 soll eine Formelsammlung (→ Anhang: Tabelle I: Formelübersicht für lineare Bewegungen) geschaffen werden, sodass jede ähnliche Bewegungsaufgabe ohne Umformen gelöst werden kann. Nebenbei sollten diese Formeln besser verstanden werden als die in Tabellenbüchern und nicht zuletzt das Umformen von Gleichungen geübt werden.

Alle Lösungen basieren auf den Grundgleichungen

$$\boxed{v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{mit} \quad v_m = \frac{v_1 + v_0}{2}} \qquad (1)$$

$$\boxed{a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{mit} \quad \Delta v = v_1 - v_0} \qquad (2)$$

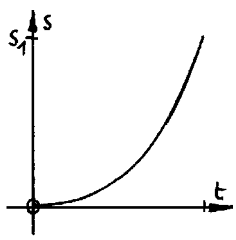
Die Grundgleichungen enthalten insgesamt 5 Größen (Beschleunigung a, Wegänderung Δs, Zeitänderung Δt, Anfangsgeschwindigkeit v_0 und Endgeschwindigkeit v_1)[1]. Jede Grundgleichung enthält 4 dieser Größen, was bedeutet, dass man 3 Größen kennen muss, um die 4. zu berechnen, während man die 5. Größe nicht benötigt bzw. zusätzlich berechnen kann.

Für die folgenden Lösungsvorschläge gilt:

– Wenn eine Aufgabe mit einer Grundgleichung gelöst werden kann, wird diese einfach umgeformt.
– Wenn eine Aufgabe nur mit beiden Grundgleichungen gelöst werden kann, werden diese nach der unbeteiligten 5. Größe umgeformt und die Ergebnisse gleichgesetzt. Mit der entstandenen Formel kann man die gesuchte Größe aus 3 gegebenen Größen berechnen.
– Oft sind einfachere Lösungswege möglich, z.B. wenn man in Teilaufgabe b) das Ergebnis aus a) verwendet. Auf die Vereinfachung, die in Prüfungen durchaus zulässig ist, wird hier im Sinne der Formelsammlung und des Einübens verzichtet.

417 Herleitung von Δs ohne a:

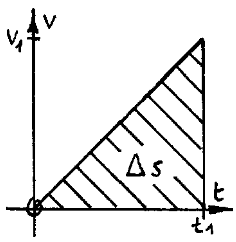
a	Δs	Δt	v_0	v_1
-	?	12s	0	6m/s



Aus Grundgleichung (1) folgt:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \rightarrow$$

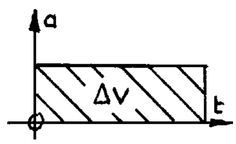
$$\boxed{\Delta s = \Delta t \cdot v_m = \Delta t \cdot \frac{v_1 + v_0}{2}} \qquad (1b)$$



Mit Zahlen:

$$\Delta s = 12\text{s} \cdot \frac{6\frac{m}{s} + 0}{2} = 36\text{m}$$

Die Formel für den Beschleunigungsweg im Tabellenbuch entsteht, indem man $v_0 = 0$ in die obige Formel einsetzt:



$$\Delta s_{01} = \frac{v_1 + \cancel{v_0}}{2} \cdot \Delta t_{01} = \frac{1}{2} \cdot v_1 \cdot \Delta t_{01}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6\frac{m}{s} \cdot 12\, s = 36\, m$$

418 Herleitung von Δt ohne a:

a	Δs	Δt	v_0	v_1
-	100m	?	0	36km/h 10 m/s

Aus Grundgleichung (1) folgt:

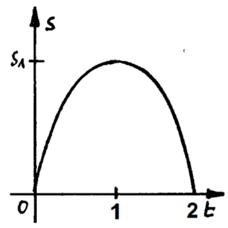
$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad \boxed{\Delta t = \frac{\Delta s}{v_m} = \frac{2 \cdot \Delta s}{v_1 + v_0}} \qquad (1c)$$

Mit Zahlen:

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v_m} = \frac{2 \cdot 100\, m}{10\frac{m}{s} + 0} = 20\text{s}$$

419 Grundgleichung (2)

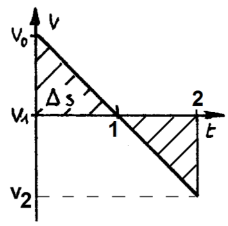
a	Δs	Δt	v_0	v_1
?	-	0,5s	18 m/min 0,3 m/s	-18 m/min 0,3 m/s



$$\boxed{a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1 - v_0}{\Delta t}} \qquad (2a)$$

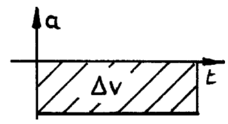
Mit Zahlen

$$a = \frac{(-0{,}3\frac{m}{s}) - (+0{,}3\frac{m}{s})}{0{,}5\, s} = -1{,}2\frac{m}{s^2}$$



Das negative Vorzeichen[2] bedeutet, dass die Beschleunigung entgegen v_0 wirkt. Beschleunigung und Verzögerung sind hier gleich.

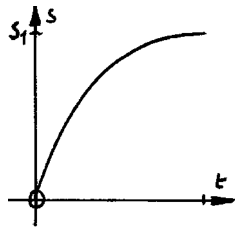
Die Nummerierung im Diagramm passt nicht zur Aufgabe, v_1 wirkt am Punkt 2 im Diagramm.



420

a) Herleitung von v_0 ohne Δs:

a	Δs	Δt	v_0	v_1
-3,3 m/s²	-	8,8s	?	0



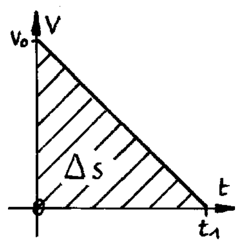
Aus Grundgleichung (2) folgt:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad \boxed{\Delta v = a \cdot \Delta t} \qquad (2g)$$

Mit $\Delta v = v_1 - v_0$ folgt:

$$\Delta v = a \cdot \Delta t = v_1 - v_0 \quad \rightarrow$$

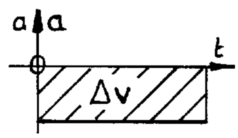
$$\boxed{v_0 = v_1 - a \cdot \Delta t} \qquad (2d)$$



Mit Zahlen:

$$v_0 = 0 - (-3{,}3\frac{m}{s^2}) \cdot 8{,}8\, s$$

$$= 29{,}04\frac{m}{s} = 104{,}5\frac{km}{h}$$



[1] Weg s und Zeit t werden als -änderung bzw. -differenz mit Δ beschrieben, damit später zwanglos Probleme gelöst werden können, die nicht bei s = 0 und t = 0 beginnen.

[2] In einfachen Fällen rechnet man oft mit Beträgen, also ohne Minuszeichen, und muss dann die Richtung im Kopf behalten. Aber sobald die Gleichungen komplizierter werden, sollte man sich darauf nicht verlassen und mit Vorzeichen rechnen.

b) Herleitung von Δs ohne v_0

a	Δs	Δt	v_0	v_1
-3,3m/s²	?	8,8s	-	0

Grundgleichung (1)

$$v_m=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{v_1+v_0}{2}$$
$$\downarrow$$
$$v_0=2\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}-v_1$$

Grundgleichung (2)

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_1-v_0}{\Delta t}$$
$$\downarrow$$
$$v_0=v_1-a\cdot\Delta t$$

Gleichungen gleich setzen und nach der gesuchten Größe umformen:

$$v_0=2\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}-v_1=v_1-a\cdot\Delta t \quad\rightarrow$$
$$\boxed{\Delta s=v_1\cdot\Delta t-\frac{1}{2}a\cdot\Delta t^2} \quad (4b)$$

Mit Zahlen:

$$\Delta s=0\cdot 8{,}8\,s-\frac{1}{2}(-3{,}3\,\frac{m}{s^2})\cdot(8{,}8\,s)^2=127{,}8\,m$$

421 Herleitung von v_0 ohne Δt (Diagramme s. Aufg. 419)

a	Δs	Δt	v_0	v_1	Δv	v_m
-9,81m/s²	30m	-	?	0		

Grundgleichung (1)

$$v_m=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$
$$\downarrow$$
$$\Delta t=\frac{\Delta s}{v_m}$$

Grundgleichung (2)

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$$
$$\downarrow$$
$$\Delta t=\frac{\Delta v}{a}$$

Gleichungen gleich setzen und umformen

$$\Delta t=\frac{\Delta s}{v_m}=\frac{\Delta v}{a} \quad\rightarrow\quad \frac{\Delta s}{\frac{v_1+v_0}{2}}=\frac{v_1-v_0}{a} \quad\rightarrow$$
$$\Delta s=\frac{v_1^2-v_0^2}{2a} \quad\rightarrow \boxed{v_0=\pm\sqrt{v_1^2-2a\cdot\Delta s}} \quad (3d)$$

Mit Zahlen:

$$v_0=\pm\sqrt{0-2\cdot(-9{,}81)\frac{m}{s^2}\cdot 30\,m}=+24{,}3\,\frac{m}{s}$$

Die negative Geschwindigkeit ist mathematisch möglich, aber technisch nicht sinnvoll[1].

422 Diagramme siehe Aufg. 417.

a	Δs	Δt	v_0	v_1	Δv	v_m
0,18m/s²	-	?	0	70 km/h 19,4 m/s		

Grundgleichung (2):

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t} \quad\rightarrow \boxed{\Delta t_{01}=\frac{\Delta v}{a}=\frac{v_1-v_0}{a}} \quad (2c)$$

Mit Zahlen:

$$\Delta t_{01}=\frac{19{,}4\,\frac{m}{s}}{0{,}18\,\frac{m}{s^2}}=108\mathrm{s}=1\min 48\mathrm{s}$$

[1] Mathematisch sind manchmal mehr Lösungen möglich, als technisch sinnvoll sind. Es gibt aber auch Aufgaben, in den denen mehrere Lösungen technisch sinnvoll sind, z.B. Aufgabe 426. Diese Entscheidung zu treffen gehört zum Lösen der Aufgabe.

423 Herleitung von a ohne Δt

a	Δs	Δt	v_0	v_1	Δv	v_m
?	0,5m	-	3,6km/h 1 m/s	0		

Grundgleichung (1)

$$v_m=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$
$$\downarrow$$
$$\Delta t=\frac{\Delta s}{v_m}$$

Grundgleichung (2)

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$$
$$\downarrow$$
$$\Delta t=\frac{\Delta v}{a}$$

Gleich setzen und berechnen

$$\Delta t=\frac{\Delta s}{v_m}=\frac{\Delta v}{a} \quad\rightarrow\quad \frac{\Delta s}{\frac{v_1+v_0}{2}}=\frac{v_1-v_0}{a} \quad\rightarrow$$
$$\Delta s=\frac{v_1^2-v_0^2}{2a} \quad\rightarrow \boxed{a=\frac{v_1^2-v_0^2}{2\Delta s}} \quad (3a)$$

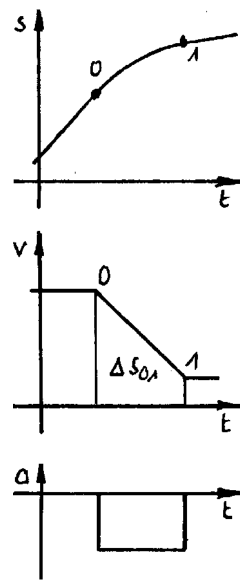
Mit Zahlen:

$$a=\frac{v_1^2-v_0^2}{2\cdot\Delta s}=\frac{0-1\,\frac{m}{s}}{2\cdot 0{,}5\,m}=-1\,\frac{m}{s^2}$$

424 Verschiebebahnhof

a) Herleitung von v_1 ohne a

a	Δs	Δt	v_0	v_1
-	5m	2,5s	11,4km/h 3,17m/s	?



Aus Gleichung (1):

$$v_m=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{v_1+v_0}{2} \quad\rightarrow$$
$$\boxed{v_1=\frac{2\cdot\Delta s_{01}}{\Delta t}-v_0} \quad (1e)$$

Mit Zahlen

$$v_1=\frac{2\cdot 5\mathrm{m}}{2{,}5\,s}-3{,}1\overline{6}\,\frac{m}{s}$$
$$=0{,}833\,\frac{m}{s}=3\,\frac{km}{h}$$

b) Herleitung von a ohne v_1

a	Δs	Δt	v_0	v_1
?	5m	2,5s	11,4km/h 3,17m/s	-

Gleichung (1)

$$v_m=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{v_1+v_0}{2}$$
$$\downarrow$$
$$v_1=2\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}-v_0$$

Gleichung (2)

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_1-v_0}{\Delta t}$$
$$\downarrow$$
$$v_1=v_0+a\cdot\Delta t$$

Gleich setzen und berechnen

$$v_1=\frac{2\cdot\Delta s_{01}}{\Delta t}-v_0=v_0+a\cdot\Delta t \quad\rightarrow$$
$$\boxed{a=2\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t^2}-2\cdot\frac{v_0}{\Delta t}} \quad (5a)$$

Zahlenwerte einsetzen

$$a=2\cdot\frac{5\,m}{(2{,}5\,s)^2}-2\cdot\frac{3{,}17\,m/s}{2{,}5\,s}=-0{,}933\,\frac{m}{s^2}$$

425 Frei fallender Körper

a) Diagramme Aufg. 417.; Glchg. (2c) wie in Aufg. 422:

a	Δs	Δt	v_0	v_1	Δv	v_m
-9,81 m/s	-	?	0	-40 m/s		

$$\Delta t_{01}=\frac{\Delta v_{01}}{a}=\frac{v_1-v_0}{g}=\frac{-40\,m/s-0}{-9{,}81\,m/s^2}=4{,}08\,s$$

b) Gleichung (3b) wie in Aufg. 423:

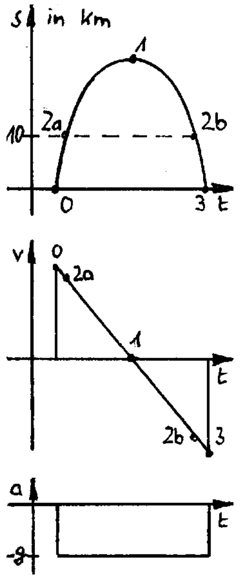
a	Δs	Δt	v_0	v_1	Δv	v_m
-9,81 m/s	?	-	0	-40 m/s		

$$\Delta s=\frac{v_1^2-v_0^2}{2\,a}=\frac{(-40\,m/s)^2-0^2}{2\cdot(-9{,}81\,m/s^2)}=-81{,}5\,m$$

oder Gleichung (1b) mit dem Ergebnis aus a):

$$\Delta s_{01}=v_m\cdot\Delta t_{01}=\frac{v_1+\cancel{v_0}}{2}\cdot\Delta t_{01}=\frac{-40\,m}{2\cdot s}\cdot 4{,}08\,s=-81{,}5\,m$$

426 Geschoss



a) Gleichung (3b) wie in Aufg. 423:

a	Δs	Δt	v_0	v_1
-9,81 m/s	?	-	1200 m/s	0

$$\Delta s_{01}=\frac{v_1^2-v_0^2}{2\cdot a}$$

$$=\frac{0-(1200\,\frac{m}{s})^2}{2\cdot(-9{,}81)\,\frac{m}{s^2}}=73{,}4\,km$$

b) Gleichung (2c) wie in Aufg. 422:

a	Δs	Δt	v_0	v_1
-9,81 m/s	-	?	1200 m/s	0

$$\Delta t_{01}=\frac{\Delta v_{01}}{a}=\frac{v_1-v_0}{g}$$

$$=\frac{0-1200\,\frac{m}{s}}{(-9{,}81)\,\frac{m}{s^2}}=122{,}3\,s$$

c) Herleitung von Δs ohne v_1:

a	Δs	Δt	v_0	v_1	Δv	v_m
-9,81 m/s	10000m	?	1200 m/s	-		

Lösungsmöglichkeit 1 mit der allgemeinen Lösung für quadratische Gleichungen:

Gleichung (1)	Gleichung (2)
$v_m=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{v_1+v_0}{2}$	$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_1-v_0}{\Delta t}$
↓	↓
$v_1=2\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}-v_0$	$v_1=v_0+a\cdot\Delta t$

$$v_1=\frac{2\cdot\Delta s}{\Delta t}-v_0=v_0+a\cdot\Delta t \quad\rightarrow$$

$$\boxed{\Delta s=+v_0\cdot\Delta t+\frac{1}{2}\cdot a\cdot\Delta t^2} \quad (5b)$$

Dazu muss die quadratische Gleichung in die Form 0 = Δt² + .. gebracht werden:

$$0=\Delta t^2+\frac{2\cdot v_0}{a}\cdot\Delta t-\frac{2}{a}\cdot\Delta s$$

Mit der allg. Lösung für quadratische Gleichungen (41):

$$0=x^2+p\cdot x+q \quad\rightarrow\quad x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

wird:

$$\boxed{\Delta t=\frac{-2\cdot v_0}{2\cdot a}\pm\sqrt{\left(\frac{2\cdot v_0}{2\cdot a}\right)^2-\left(\frac{-2\cdot\Delta s}{a}\right)}} \quad (5c)$$

Mit Zahlen:

$$\Delta t_{02}=\frac{-1200\,\frac{m}{s}}{(-9{,}81)\,\frac{m}{s^2}}\pm\sqrt{\left(\frac{1200\,\frac{m}{s}}{(-9{,}81)\,\frac{m}{s^2}}\right)^2-\left(\frac{-2\cdot 10000\mathrm{m}}{(-9{,}81)\,\frac{m}{s^2}}\right)}$$

$$=122{,}3\,s\pm 113{,}7\,s$$

$$\Delta t_{2a}=8{,}64\,s$$

$$\Delta t_{2b}=236\,s$$

Hinweis: Beide mathematischen Lösungen sind technisch sinnvoll, denn das Geschoss passiert 10000m Höhe erst beim Steigen und dann wieder beim Sinken.

Lösungsmöglichkeit 2: Erst die Geschwindigkeit v_2 mit Gleichung (3d) wie in Aufg. 422 berechnen:

$$v_2=\pm\sqrt{v_0^2+2\cdot g\cdot\Delta s_{02}}$$

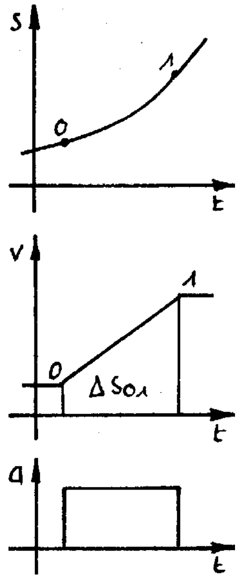
$$v_2=\pm\sqrt{(1200\,\frac{m}{s})^2+2\cdot(-9{,}81)\,\frac{m}{s^2}\cdot 10000\mathrm{m}}=\pm 1115{,}3\,\frac{m}{s}$$

und dann mit Gleichung (2c) wie in Aufg. 422:

$$\Delta t_{02}=\frac{\Delta v}{a}=\frac{v_2-v_0}{g}=\frac{\pm 1115{,}3\,\frac{m}{s}-1200\,\frac{m}{s}}{(-9{,}81)\,\frac{m}{s^2}}$$

$$\Delta t_{02a}=8{,}64\,s \qquad \Delta t_{02b}=236\,s$$

427 Pkw auf Gefällstrecke



a) Herleitung von v_1 ohne Δs:

a	Δs	Δt	v_0	v_1
1,1m/s²	400m	-	30km/h 8,33m/s	?

Gleichung (1)	Gleichung (2)
$v_m=\frac{\Delta s}{\Delta t}$	$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$
↓	↓
$\Delta t=\frac{\Delta s}{v_m}$	$\Delta t=\frac{\Delta v}{a}$

Gleich setzen und umformen

$$\Delta t=\frac{\Delta s}{v_m}=\frac{\Delta v}{a} \quad\rightarrow$$

$$\boxed{v_1=\pm\sqrt{v_0^2+2\,a\cdot\Delta s}} \quad (3e)$$

Mit Zahlen:

$$v_1=\pm\sqrt{\left(8{,}\overline{3}\,\frac{m}{s}\right)^2+2\cdot 1{,}1\,\frac{m}{s^2}\cdot 400\,m}$$

$$=30{,}8\,\frac{m}{s}=110{,}9\,\frac{km}{h}$$

Die negative Lösung ist technisch nicht sinnvoll.

b) Lösungsweg 1 mit Gleichung (5c) wie in Aufg. 426c:

a	Δs	Δt	v_0	v_1	Δv	v_m
1,1m/s²	400m	?	30km/h 8,33m/s	-		

$$0=\Delta t^2+\frac{2\cdot v_0}{a}\cdot\Delta t-\frac{2}{a}\cdot\Delta s$$

$$=\Delta t^2+\frac{2\cdot 8{,}33\,\frac{m}{s}}{1{,}1\,\frac{m}{s^2}}\cdot\Delta t-\frac{2}{1{,}1\,\frac{m}{s^2}}\cdot 400\text{m}$$

$$=\Delta t^2+15{,}15\,s\cdot\Delta t-727{,}27\,s^2$$

Mit der allg. Lösung für quadratische Gleichungen:

$$0=x^2+p\cdot x+q\quad\rightarrow\quad x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

ergibt sich mit Zahlen:

$$\Delta t=-\frac{15{,}15\,s}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{15{,}15\,s}{2}\right)^2-(-727{,}27)\,s^2}$$

$$=-7{,}57\,s\pm 28{,}01\,s$$

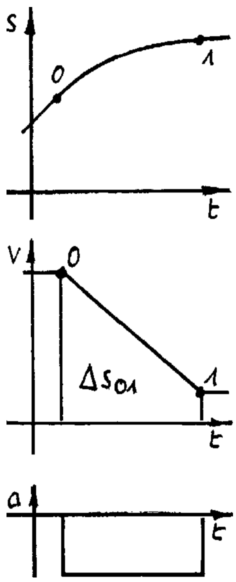
$$\Delta t_a=20{,}4\,s\qquad\Delta t_b=-35{,}6\,s$$

Die negative Lösung ist technisch nicht sinnvoll.

Lösungsweg 2 mit v_1 aus Teilaufgabe a und Gleichung (2c) wie in Aufg. 422:

$$\Delta t_{01}=\frac{v_1-v_0}{a}=\frac{30{,}8\,\frac{m}{s}-8{,}33\,\frac{m}{s}}{1{,}1\,\frac{m}{s^2}}=20{,}4\,s$$

428 Werkstück auf Rutsche



a) Gleichung (2c) wie in Aufg. 422:

a	Δs	Δt	v_0	v_1
-0,8 m/s²	-	?	1,4m/s	0,3m/s

$$\Delta t_{01}=\frac{v_1-v_0}{a}=\frac{0{,}3\,\frac{m}{s}-1{,}4\,\frac{m}{s}}{-0{,}8\,\frac{m}{s^2}}$$

$$=1{,}375\,s$$

b) Gleichung (1b) wie in Aufg. 414a:

a	Δs	Δt	v_0	v_1
-0,8 m/s²	?	-	1,4m/s	0,3m/s

$$\Delta s_{01}=\frac{v_1+v_0}{2}\cdot\Delta t_{01}$$

$$=\frac{0{,}3\,\frac{m}{s}+1{,}4\,\frac{m}{s}}{2}\cdot 1{,}375\,s=1{,}17\,m$$

429 Kegelkugel

a) Gleichung (3a) wie in Aufg. 423:

a	Δs	Δt	v_0	v_1	Δv	v_m
?	2m	-	1,5m/s	0,3m/s		

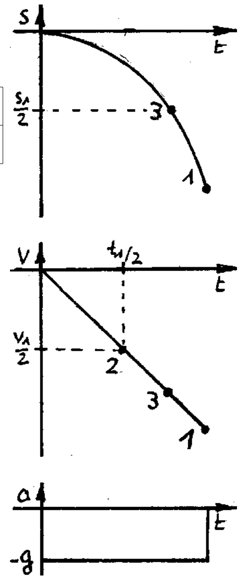
$$a=\frac{v_1^2-v_0^2}{2\cdot\Delta s_{01}}=\frac{\left(0{,}3\,\frac{m}{s}\right)^2-\left(1{,}5\,\frac{m}{s}\right)^2}{2\cdot 2\,m}=-0{,}54\,\frac{m}{s^2}$$

b) Gleichung (1c) wie in Aufg. 409b:

a	Δs	Δt	v_0	v_1	Δv	v_m
-	2m	?	1,5m/s	0,3m/s		

$$\Delta t_{01}=\frac{2\cdot\Delta s}{v_1+v_0}=\frac{2\cdot 2\,m}{0{,}3\,\frac{m}{s}+1{,}5\,\frac{m}{s}}=2{,}22\,s$$

430 Frei fallender Körper



a) Fallzeit: Aus Gleichung (5c) wie in Aufg. 426c:

a	Δs	Δt	v_0	v_1
-9,81m/s²	45m	?	0m/s	-

$$\Delta t=\frac{-2\cdot v_0}{2\cdot a}\pm\sqrt{\left(\frac{2\cdot v_0}{2\cdot a}\right)^2-\left(\frac{-2\cdot\Delta s}{a}\right)}$$

wird mit v_0 = 0, Δs = h und a = g (Erdbeschleunigung) die Formel für die Fallzeit

$$T=\sqrt{\frac{2\cdot h}{g}}\quad\rightarrow$$

$$t_1=\sqrt{\frac{2\cdot(-45)\,m}{-9{,}81\,\frac{m}{s^2}}}=3{,}029\,s$$

b) Aufprallgeschwindigkeit bei freiem Fall: Aus Gleichung (3e) wie in Aufg. 427a:

a	Δs	Δt	v_0	v_1	Δv	v_m
-9,81m/s²	-45m	-	0m/s	?		

$$v_1=\pm\sqrt{v_0^2+2\,a\cdot\Delta s}$$

wird mit v_0 = 0, Δs = h und a = g (Erdbeschleunigung) die Formel für die Aufprallgeschwindigkeit bei freiem Fall

$$v_1=\pm\sqrt{2\text{g}\cdot h}=\pm\sqrt{2\left(-9{,}81\,\frac{m}{s^2}\right)\cdot(-45\text{m})}=-29{,}7\,\frac{m}{s}$$

Die positive Geschwindigkeit ist im gewählten Koordinatensystem (nach unten = negativ) nicht sinnvoll.

c) Gleichung (5b) wie in Aufg. 426c:

a	Δs	Δt_{02}	v_0	v_1	Δv	v_m
-9,81m/s²	?	$t_1/2$	0m/s	-		

$$\Delta s_{02}=+\frac{1}{2}\cdot a\cdot\Delta t_{02}{}^2+\cancel{v_0}\cdot\Delta t_{02}$$

$$=+\frac{1}{2}\cdot\left(-9{,}81\,\frac{m}{s^2}\right)\cdot\left(\frac{3{,}029\,s}{2}\right)^2+0\cdot 3{,}029\,\frac{s}{2}$$

$$=-11{,}25\,m\ \ \text{(ab Startpunkt)}$$

$$\Delta s_{02}=s_2-s_0\quad\rightarrow$$

$$s_2=s_0+\Delta s_{02}=45\text{m}-11{,}25\,m$$

$$=33{,}75\,m\ \ \text{(über dem Boden)}$$

d) Gleichung (3b)b wie in Aufg. 423:

a	Δs	Δt	v_0	v_3	Δv	v_m
-9,81m/s²	?	-	0m/s	$v_1/2$		

$$\Delta s_{03}=\frac{v_3^2-\cancel{v_0^2}}{2\cdot a}=\frac{\left(\frac{-29{,}7\,m}{2\cdot s}\right)^2-0}{2\cdot(-9{,}81)\frac{m}{s^2}}=-11{,}24\,m$$

$$\Delta s_{03}=s_3-s_0 \quad\rightarrow$$

$$s_3=s_0+\Delta s_3=45\,m-11{,}24\,m=33{,}76 \quad \text{(über Boden)}$$

Die Ergebnisse aus c) und d) sind bis auf Rundungsunterschiede identisch, denn gemäß der Gleichung (2) ist nach der halben Zeit auch die halbe Geschwindigkeit erreicht.

e) Fallzeit wie in Aufg. 430a:

a	Δs_{03}	Δt	v_0	v_3	Δv	v_m
-9,81m/s²	$\Delta s_{01}/2$	?	0m/s	-		

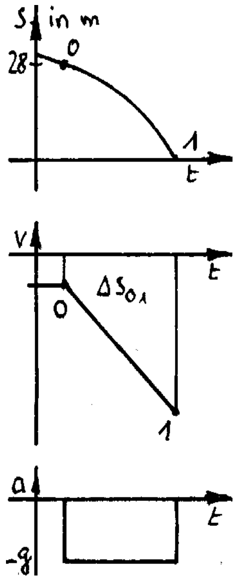
$$T=\sqrt{\frac{2\cdot h}{g}} \quad\rightarrow$$

$$\Delta t_{03}=\sqrt{\frac{2\cdot\Delta s_{03}}{g}}=\sqrt{\frac{2\cdot\frac{-45\text{m}}{2}}{-9{,}81\frac{m}{s^2}}}=2{,}14\,s$$

431 Förderkorb

a) Herleitung von v_1 ohne v_0:

a	Δs	Δt	v_0	v_1
-9,81m/s²	28m	1,5s	-	?



Grundglchg. (1)

$$v_m=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{v_1+v_0}{2}$$
$$\downarrow$$
$$v_0=2\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}-v_1$$

Grundglchg. (2)

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_1-v_0}{\Delta t}$$
$$\downarrow$$
$$v_0=v_1-a\cdot\Delta t$$

Gleich setzen und umformen:

$$v_0=2\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}-v_1=v_1-a\cdot\Delta t \quad\rightarrow$$

$$\boxed{v_1=\frac{\Delta s}{\Delta t}+\frac{1}{2}a\cdot\Delta t} \quad (4e)$$

Mit Zahlen:

$$v_1=\frac{\Delta s_{01}}{\Delta t_{01}}+\frac{1}{2}a\cdot\Delta t_{01}=\frac{-28\,m}{1{,}5\,s}+\frac{1}{2}(-9{,}81\frac{m}{s^2})\cdot 1{,}5\,s$$
$$=-26{,}0\frac{m}{s}$$

b) Herleitung von v_0 ohne v_1:

a	Δs	Δt	v_0	v_1	Δv	v_m
-9,81m/s²	28m	1,5s	?	-		

Gleichung (1)

$$v_m=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{v_1+v_0}{2}$$
$$\downarrow$$
$$v_1=2\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}-v_0$$

Gleichung (2)

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_1-v_0}{\Delta t}$$
$$\downarrow$$
$$v_1=v_0+a\cdot\Delta t$$

Gleichungen gleich setzen und umformen:

$$v_1=\frac{2\cdot\Delta s}{\Delta t}-v_0=v_0+a\cdot\Delta t \quad\rightarrow$$

$$\boxed{v_0=\frac{\Delta s}{\Delta t}-\frac{1}{2}a\cdot\Delta t} \quad (5d)$$

Mit Zahlen:

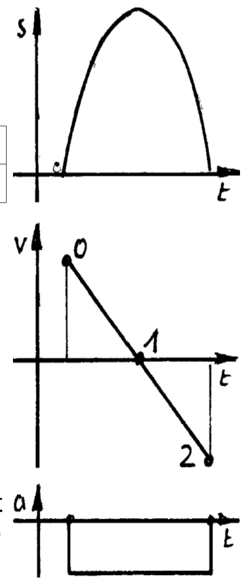
$$v_0=\frac{\Delta s_{01}}{\Delta t_{01}}-\frac{1}{2}a\cdot\Delta t_{01}=\frac{-28\,m}{1{,}5\,s}-\frac{1}{2}\left(-9{,}81\frac{m}{s^2}\right)\cdot 1{,}5\,s$$
$$=-11{,}3\frac{m}{s}$$

Die negativen Vorzeichen kommen daher, dass im Koordinatensystem oben positiv ist und der Förderkorb nach unten fährt / fällt.

432 Stein

a) Lösungsmöglichkeit 1:
Gleichung (5d) wie in Aufg. 431b:

a	Δs	Δt	v_0	v_1
-9,81m/s²	0	8s	?	-



$$v_0=\frac{\Delta s_{02}}{\Delta t_{02}}-\frac{1}{2}a\cdot\Delta t_{02}$$
$$=\frac{0\,m}{8\,s}-\frac{1}{2}\cdot(-9{,}81\frac{m}{s^2})\cdot 8\text{s}$$
$$=39{,}24\frac{m}{s}$$

Lösungsmöglichkeit 2:
v_0 kann man mit dem Flug zum Scheitelpunkt berechnen, dort ist v_1 = 0 und t_1 = 4s (Gleichung (2))

$$\Delta v_{01}=a\cdot\Delta t_{01}=\cancel{v_1}-v_0$$
$$v_0=-a\cdot\Delta t_{01}$$
$$=-(-9{,}81\frac{m}{s^2})\cdot 4\,s=39{,}24\frac{m}{s}$$

Lösungsmöglichkeit 3:
v_0 kann man auch mit dem Flug zum Aufprall berechnen, dort ist v_1 = -v_0 und t_1 = 8s (Gleichung (2))

$$\Delta v_{02}=a\cdot\Delta t_{02}=v_2-v_0=-2\,v_0 \quad\rightarrow$$
$$v_0=-\frac{1}{2}\cdot a\cdot\Delta t_{02}$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot(-9{,}81\frac{m}{s^2})\cdot 8\,s=39{,}24\frac{m}{s}$$

b) Gleichung 4b wie in Aufgabe 426c:

a	Δs	Δt	v_0	v_1	Δv	v_m
-9,81m/s²	?	4s	-	0		

$$\Delta s_{01}=+\cancel{v_1}\cdot\Delta t_{01}-\frac{1}{2}\cdot a\cdot\Delta t_{01}{}^2$$
$$=0-\frac{1}{2}\cdot(-9{,}81\frac{m}{s^2})\cdot(4\,s)^2=78{,}48\,m$$

Wechelnde Beschleunigungen oder mehrere Körper

In diesem Kapitel nimmt der Umfang der Aufgaben weiter zu. Sie enthalten mehrere Bewegungszustände, deren einzelne Größen meist nicht direkt lösbar sind, sondern nur im Zusammenhang mit den anderen Bewegungszuständen.

Für solche Aufgaben kann man keinen einfachen und allgemeinen Lösungsweg angeben. Umso wichtiger ist es, die Aufgaben planvoll und systematisch anzugehen, um sich den Überblick zu erleichtern. Als Hilfsmittel dienen dazu v,t- und ähnliche Diagramme und eine übersichtliche Tabelle aller gegebenen Größen.

In der Tabelle sieht man, welche Größen fehlen, und kann ihre Formeln aufstellen. Um die Herleitung von Formeln möglichst zu reduzieren, kann man die mit den Aufgaben 417 bis 432 erarbeitete Formelsammlung verwenden. Am leichtesten findet man die Gesamtlösung, wenn man die einzelnen Formeln so aufstellt, dass sie nur gegebene und gesuchte Größen enthalten oder solche Größen, für die vorher schon eine Formel nach diesen Regeln aufgestellt wurde.

Wer es theoretischer mag: Wenn man genausoviele (unabhängige) Formeln hat wie unbekannte Größen darin enthalten sind, ist das Gleichungssystem i.d.R . lösbar.

Auf die genaue Angabe, welche Formel wo eingesetzt wird, verzichte ich hier, weil dies umständlich ist.

433 Triebwagen

Abschnitt	a	Δs	Δt	v_{Vorher}	$v_{Nachher}$
0 - 1	0,2m/s²			0	v_1
1 – 2	0			v_1	$v_2 = v_1$
2 – 3		500m		$v_2 = v_1$	0
Σ_{0-3}		5000m	360s		

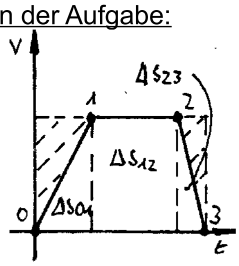
I Lösung gemäß Lösungshinweis in der Aufgabe:

In das große Rechteck minus den Dreiecken:

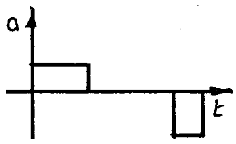
$$s_{ges}=\Delta s_{03}=v_1\cdot t_{ges}-\Delta s_{01}-\Delta s_{23}$$

setzt man ein das 1. Dreieck

$$\Delta s_{01}=\frac{v_1^2-\cancel{v_0^2}}{2\cdot a_{01}}=\frac{v_1^2}{2\cdot a_{01}}$$



und das gegebene Dreieck Δs_{23} und erhält die Gleichung wie oben:



$$s_{ges}=v_1\cdot t_{ges}-\frac{v_1^2}{2\cdot a_{01}}-\Delta s_{23}$$

Diese Lösung sieht einfacher aus, benötigt aber die richtige Idee. Die Vorgehensweise mit der Übersichtsmatrix erfordert vielleicht mehr Arbeit, dafür weniger Ideen ☺

II Iterative Lösung (Ausprobieren)

Man schätzt die gesuchte Geschwindigkeit und rechnet aus, wie weit der Zug mit der Schätzung kommen würde. Wenn er mit der 1ten Schätzung zu weit fahren würde, wählt man die 2te Schätzung kleiner u.u. Man passt die Schätzung so oft an, bis das Ergebnis genau genug ist.

Wer schlechter schätzt oder ein genaues Ergebnis braucht, muss häufiger rechnen (Tabellenkalkulation!), aber trotzdem ist es oft die einfachste Lösung.

1. Schätzung: v_1 = 10 m/s

$$\Delta s_{01}=\frac{v_N^2-\cancel{v_V^2}}{2\cdot a_{01}}=\frac{v_1^2}{2\cdot a_{01}}=\frac{(10\,m/s)^2}{2\cdot 0{,}2\,m/s^2}=250\,m$$

$$\Delta t_{01}=\frac{v_N-\cancel{v_V}}{a_{01}}=\frac{v_1}{a_{01}}=\frac{10\,m/s}{0{,}2\,m/s^2}=50\,s$$

$$\Delta s_{23}=500\,m$$

$$\Delta t_{23}=\frac{2\cdot\Delta s_{23}}{v_N+\cancel{v_V}}=\frac{2\cdot\Delta s_{23}}{v_1}=\frac{2\cdot 500\,m}{10\,m/s}=100\,s$$

$$\Delta t_{12}=\Delta t_{03}-\Delta t_{01}-\Delta t_{23}=360\,s-50\,s-100\,s=210\,s$$

$$\Delta s_{12}=v_1\cdot\Delta t_{12}=10\,\frac{m}{s}\cdot 210\,s=2100\,m$$

$$\Delta s_{03}=\Delta s_{01}+\Delta s_{12}+\Delta s_{23}=250\,m+2100\,m+500\,m=2850\,m$$

Die 1. Schätzung ist deutlich zu langsam.

2. Schätzung: v_1 = 20 m/s

$$\Delta s_{01}=\frac{v_N^2-\cancel{v_V^2}}{2\cdot a_{01}}=\frac{v_1^2}{2\cdot a_{01}}=\frac{(20\,m/s)^2}{2\cdot 0{,}2\,m/s^2}=1000\,m$$

$$\Delta t_{01}=\frac{v_N-\cancel{v_V}}{a_{01}}=\frac{v_1}{a_{01}}=\frac{20\,m/s}{0{,}2\,m/s^2}=100\,s$$

$$\Delta s_{23}=500\,m$$

$$\Delta t_{23}=\frac{2\cdot\Delta s_{23}}{v_N+\cancel{v_V}}=\frac{2\cdot\Delta s_{23}}{v_1}=\frac{2\cdot 500\,m}{20\,m/s}=50\,s$$

$$\Delta t_{12}=\Delta t_{03}-\Delta t_{01}-\Delta t_{23}=360\,s-100\,s-50\,s=210\,s$$

$$\Delta s_{12}=v_1\cdot\Delta t_{12}=20\,\frac{m}{s}\cdot 210\,s=4200\,m$$

$$\Delta s_{03}=\ldots=1000\,m+4200\,m+500\,m=5700\,m$$

Die 2te Schätzung ist zu hoch.

3. Schätzung: v_1 = 17,5 m/s

$$\Delta s_{01}=\frac{v_N^2-\cancel{v_V^2}}{2\cdot a_{01}}=\frac{v_1^2}{2\cdot a_{01}}=\frac{(17{,}5\,m/s)^2}{2\cdot 0{,}2\,m/s^2}=765{,}6\,m$$

$$\Delta t_{01}=\frac{v_N-\cancel{v_V}}{a_{01}}=\frac{v_1}{a_{01}}=\frac{17{,}5\,m/s}{0{,}2\,m/s^2}=87{,}5\,s$$

$$\Delta s_{23}=500\,m$$

$$\Delta t_{23}=\frac{2\cdot\Delta s_{23}}{v_N+\cancel{v_V}}=\frac{2\cdot\Delta s_{23}}{v_1}=\frac{2\cdot 500\,m}{17{,}5\,m/s}=57{,}1\,s$$

$$\Delta t_{12}=\Delta t_{03}-\Delta t_{01}-\Delta t_{23}=360\,s-87{,}5\,s-57{,}1\,s=215{,}4\,s$$

$$\Delta s_{12}=v_1\cdot\Delta t_{12}=17{,}5\,\frac{m}{s}\cdot 215{,}4\,s=3769{,}5\,m$$

$$\Delta s_{03}=\ldots=765{,}6\,m+3769{,}5\,m+500\,m=5035{,}1\,m$$

Wer es noch genauer braucht, muss die Schätzung noch ein wenig herabsetzen.

III Iterative Lösung mithilfe des Lösungshinweises

Vereinfacht die obige Rechnung, Beispiel siehe Aufgabe 434.

Quelle der Aufgaben: Alfred Böge / Walter Schlemmer: Aufgabensammlung Technische Mechanik, Vieweg+Teubner, Ausgaben ziemlich identisch seit mind. 1999

IV Lösung per Gleichungssystem

Gleichungen

$\Delta s_{01}=\frac{v_N^2-\cancel{v_V^2}}{2\cdot a_{01}}=\frac{v^2}{2\cdot a_{01}}$	$\Delta t_{01}=\frac{v_N-\cancel{v_V}}{a_{01}}=\frac{v}{a_{01}}$
$\Delta s_{12}=\Delta t_{12}\cdot\frac{v_N+v_N}{2}$ $=\Delta t_{12}\cdot v$	
	$\Delta t_{23}=\frac{2\cdot\Delta s_{23}}{v_N+\cancel{v_V}}=\frac{2\cdot\Delta s_{23}}{v_N}$
$\Delta s_{03}=\Delta s_{01}+\Delta s_{12}+\Delta s_{23}$	$\Delta t_{03}=\Delta t_{01}+\Delta t_{12}+\Delta t_{23}\rightarrow$ $\Delta t_{12}=\Delta t_{03}-\Delta t_{01}-\Delta t_{23}$

Es liegen 6 unabhängige Gleichungen mit 6 unbekannten Größen (Δs_{01}, Δs_{12}, Δt_{01}, Δt_{12}, Δt_{23} und v_1) vor, darunter die gesuchte, also kann gelöst werden.

$$\Delta s_{03}=\Delta s_{01}+\Delta s_{12}+\Delta s_{23}$$
$$\Delta s_{03}=\frac{v^2}{2\cdot a_{01}}+\Delta t_{12}\cdot v+\Delta s_{23}$$
$$\Delta s_{03}=\frac{v^2}{2\cdot a_{01}}+(\Delta t_{03}-\Delta t_{01}-\Delta t_{23})\cdot v+\Delta s_{23}$$
$$\Delta s_{03}=\frac{v^2}{2\cdot a_{01}}+(\Delta t_{03}-\frac{v}{a_{01}}-\frac{2\cdot\Delta s_{23}}{v})\cdot+\Delta s_{23}$$

In der letzten Formel sind nur noch bekannte Größen und die gesuchte Größe enthalten. Nun wird die Gleichung in die Form für die allgemeine Lösung von quadratischen Gleichungen gebracht,

$$\Delta s_{03}=\frac{v^2}{2\cdot a_{01}}+(\Delta t_{03}-\frac{v}{a_{01}}-\frac{2\cdot\Delta s_{23}}{v})\cdot v+\Delta s_{23}$$
$$0=\frac{v^2}{2\cdot a_{01}}+\Delta t_{03}\cdot v-\frac{v^2}{a_{01}}-2\cdot\Delta s_{23}+\Delta s_{23}-\Delta s_{03}$$
$$0=\frac{v^2}{2\cdot a_{01}}-\frac{v^2}{a_{01}}+\Delta t_{03}\cdot v-\Delta s_{23}-\Delta s_{03}$$
$$0=\left(\frac{1}{2\cdot a_{01}}-\frac{1}{a_{01}}\right)\cdot v^2+\Delta t_{03}\cdot v-(\Delta s_{23}+\Delta s_{03})$$
$$0=-\frac{1}{2\cdot a_{01}}\cdot v^2+\Delta t_{03}\cdot v-(\Delta s_{23}+\Delta s_{03})$$
$$0=v^2-2\cdot a_{01}\cdot\Delta t_{03}\cdot v+(\Delta s_{23}+\Delta s_{03})\cdot 2\cdot a_{01}$$

mit Zahlen vereinfacht

$$0=v^2-2\cdot 0{,}2\frac{m}{s^2}\cdot 360\,s\cdot v+2\cdot 0{,}2\frac{m}{s^2}\cdot(5000\mathrm{m}+500\mathrm{m})$$
$$0=v^2-144\frac{m}{s}\cdot v+2200\frac{m^2}{s^2}$$

und in die allgemeine Lösung (Gleichung (41)) für quadratische Gleichungen eingesetzt:

$$v_{a,b}=-\frac{(-144\frac{m}{s})}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-144\frac{m}{s}}{2}\right)^2-2200\frac{m^2}{s^2}}$$
$$=72\frac{m}{s}-54{,}6\frac{m}{s}=17{,}4\frac{m}{s}=62{,}6\frac{km}{h}$$

Die zweite mathematisch mögliche Lösung

$$v=72\frac{m}{s}+54{,}6\frac{m}{s}=126{,}6\frac{m}{s}=456\frac{km}{h}$$

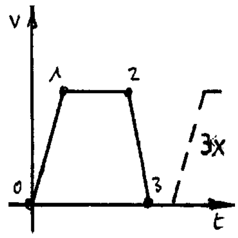
ist nicht sinnvoll, weil ??

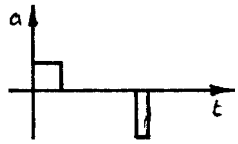
434

Weg	a	Δs	Δt	v_{Vorher}	$v_{Nachher}$
0 - 1	0,18m/s²			0	v_1
1 – 2	0			v_1	$v_2 = v_1$
2 – 3	-0,3m/s²			$v_2 = v_1$	0
Σ		20km 20 000 m	18min 1080 s		

Die Aufgabe kann auf einen Fahrtzyklus vereinfacht werden:

$$\Delta t_{03}=\frac{t_{gesamt}-2\cdot\Delta t_{pause}}{3}$$
$$=\frac{60\,min-2\cdot 3\,min}{3}=18\,min$$
$$\Delta s_{03}=\frac{s_{gesamt}}{3}=\frac{60\,km}{3}=20\,km$$





I Iterative Lösung (Ausprobieren)

mithilfe des Lösungshinweises aus Aufgabe 433, (fehlt im Bild). Statt Δs_{03} aus Δt_{01} und Δt_{23}, und dann Δt_{12} und Δs_{12} zu berechnen, ermittele ich den Weg Δs_{Voll}, den der Zug mit voller Fahrt v_1 in 18 min zurücklegen würde, und ziehe davon die Rampen Δs_{01} und Δs_{23} ab.

1. Schätzung: v_1 = 10 m/s

$$\Delta s_{03}=v_1\cdot\Delta t_{03}=10\frac{m}{s}\cdot 1080\,s=10800\,m$$

Da schon die volle Fahrt keine 20 km erreicht, ist diese Schätzung viel zu niedrig.

2. Schätzung: v_1 = 20 m/s

$$\Delta s_{03}=v_1\cdot\Delta t_{03}=20\frac{m}{s}\cdot 1080\,s=21600\,m$$
$$\Delta s_{01}=\frac{v_N^2-\cancel{v_V^2}}{2\cdot a_{01}}=\frac{v_1^2}{2\cdot a_{01}}=\frac{(20\,m/s)^2}{2\cdot 0{,}18\,m/s^2}=1111{,}1\,m$$
$$\Delta s_{23}=\frac{\cancel{v_N^2}-v_V^2}{2\cdot a_{23}}=\frac{-v_1^2}{2\cdot a_{23}}=\frac{-(20\,m/s)^2}{2\cdot(-0{,}3\,m/s^2)}=666{,}7\,m$$

$$\Delta s_{03}=\Delta s_{voll}-\Delta s_{01}-\Delta s_{23}$$
$$=21600\,m-1111{,}1\,m-666{,}7\,m=19822{,}2\,m$$

Das Ergebnis reicht wahrscheinlich für DB, wer aber hier an der Schweizer Grenze zur SBB strebt, sollte mit einer etwas höheren v_1 weiter rechnen.

II Lösung per Gleichungssystem

Die Lösung erfolgt ähnlich wie in Aufgabe 433, deshalb sind hier die Erläuterungen noch kürzer:

Gleichungen

$\Delta s_{01}=\frac{v_N^2-\cancel{v_V^2}}{2\cdot a_{01}}=\frac{v^2}{2\cdot a_{01}}$	$\Delta t_{01}=\frac{v_N-\cancel{v_V}}{a_{01}}=\frac{v}{a_{01}}$
$\Delta s_{12}=\Delta t_{12}\cdot v_1$	
$\Delta s_{23}=\frac{\cancel{v_N^2}-v_V^2}{2\cdot a_{23}}=\frac{-v^2}{2\cdot a_{23}}$	$\Delta t_{01}=\frac{\cancel{v_N}-v_V}{a_{23}}=\frac{-v}{a_{23}}$
$\Delta s_{03}=\Delta s_{01}+\Delta s_{12}+\Delta s_{23}$	$\Delta t_{03}=\Delta t_{01}+\Delta t_{12}+\Delta t_{23}\rightarrow$ $\Delta t_{12}=\Delta t_{03}-\Delta t_{01}-\Delta t_{23}$

Gleichungen aufstellen und Einsetzen:

$$\Delta s_{03}=\Delta s_{01}+\Delta s_{12}+\Delta s_{23}$$

$$\Delta s_{03}=\frac{v_1^2}{2\cdot a_{01}}+\Delta t_{12}\cdot v-\frac{v_1^2}{2\cdot a_{23}}$$

$$\Delta s_{03}=\frac{v^2}{2\cdot a_{01}}+(\Delta t_{03}-\Delta t_{01}-\Delta t_{23})\cdot v-\frac{v^2}{2\cdot a_{23}}$$

$$\Delta s_{03}=\frac{v^2}{2\cdot a_{01}}+\left(\Delta t_{03}-\frac{v}{a_{01}}+\frac{v}{a_{23}}\right)\cdot v-\frac{v^2}{2\cdot a_{23}}$$

$$0=\frac{v^2}{2\cdot a_{01}}+\Delta t_{03}\cdot v-\frac{v^2}{a_{01}}+\frac{v^2}{a_{23}}-\frac{v^2}{2\cdot a_{23}}-\Delta s_{03}$$

$$0=\frac{v^2}{2\cdot a_{01}}-\frac{v^2}{a_{01}}-\frac{v^2}{2\cdot a_{23}}+\frac{v^2}{a_{23}}+\Delta t_{03}\cdot v-\Delta s_{03}$$

$$0=\left(-\frac{1}{2\cdot a_{01}}+\frac{1}{2\cdot a_{23}}\right)\cdot v^2+\Delta t_{03}\cdot v-\Delta s_{03}$$

Einsetzen von Zahlen und normieren:

$$0=\left(\frac{-1}{2\cdot 0{,}18\,\frac{m}{s^2}}+\frac{1}{2\cdot(-0{,}3)\,\frac{m}{s^2}}\right)\cdot v^2+18\,min\cdot v-20\,km$$

$$0=-4{,}444\,\frac{s^2}{m}\cdot v^2+1080\,s\cdot v-20000\text{m}\quad \Big|\div\left(-4{,}444\,\frac{s^2}{m}\right)$$

$$0=v^2-243\,\frac{m}{s}\cdot v+4500\,\frac{m^2}{s^2}$$

Lösung mit Hilfe der allgemeinen Lösung für quadratische Gleichungen (Gleichung (41) :

$$v_{a;b}=-\frac{(-243\,\frac{m}{s})}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-243\,\frac{m}{s}}{2}\right)^2-4500\,\frac{m^2}{s^2}}$$

$$=121{,}5\,\frac{m}{s}-101{,}3\,\frac{m}{s}=20{,}2\,\frac{m}{s}=72{,}7\,\frac{km}{h}$$

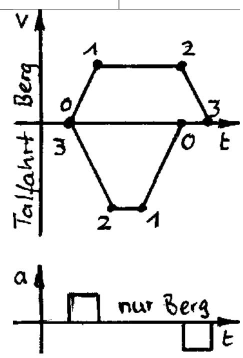
Die zweite mathematisch mögliche Lösung ist nicht sinnvoll, weil ??

435 Schrägaufzug

(in äteren Ausgaben: Tischhobelmaschine)

Überarbeiten und mit iterativer Lösung

Weg	a	Δs	Δt	v_{Vorher}	$v_{Nachher}$
0 - 1	0,1m/s²			0	v_B=1m/s v_T=1,5m/s
1 – 2	0			v_B; v_T	v_B; v_T
2 – 3	-0,1m/s²			v_B; v_T	0
Σ		200m			



a) Bergfahrt (Diagramm oben)
Weg für Beschleunigungs- und Bremsrampe:

$$\Delta s_{01}=\frac{v_N^2-v_V^2}{2\cdot a}=\frac{v^2}{2\cdot a_{01}}$$

$$=\frac{1\,\frac{m}{s}^2}{2\cdot 0{,}1\,\frac{m}{s^2}}=5\text{m}$$

$$\Delta s_{23}=\frac{-v^2}{2\cdot a_{23}}=\frac{-1\,\frac{m}{s}^2}{2\cdot -0{,}1\,\frac{m}{s^2}}=5\text{m}$$

Weg mit konstanter Geschwindigkeit:

$$\Delta s_{12}=s_{ges}-\Delta s_{01}-\Delta s_{23}=200\,m-2\cdot 5\,m=190\,m$$

Zeit für den Weg mit konstanter Geschwindigkeit:(1):

$$\Delta t_{12}=\frac{s_{12}}{v}=\frac{190\,m}{1\,\frac{m}{s}}=190\,s$$

Zeit für die Rampen:

$$\Delta t_{01}=\frac{v_N-v_V}{2\cdot a}=\frac{v}{a_{01}}=\frac{1\,\frac{m}{s}}{0{,}1\,\frac{m}{s^2}}=10\text{s}$$

$$\Delta t_{23}=\frac{v_N-v_V}{2\cdot a}=\frac{-v}{a_{23}}=\frac{-1\,\frac{m}{s}}{-0{,}1\,\frac{m}{s^2}}=10\text{s}$$

Gesamtzeit:

$$t_{ges}=\Delta t_{01}+\Delta t_{12}+\Delta t_{23}=10\,s+190\text{s}+10\text{s}=210\text{s}$$

b) Talfahrt (v,t-Diagramm unten)

$$t_{ges}=\Delta t_{01}+\Delta t_{12}+\Delta t_{23}=15\,s+118{,}3\,s+15\text{s}=148{,}3\,s$$

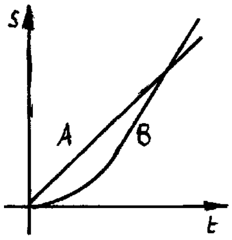
436

	A	A	A	A	A-B	B	B	B	B
Weg	a m/s²	Δs	v_{Vor} km/h	v_{Nach} km/h	Δt	a m/s²	Δs	v_{Vor} km/h	v_{Nach} km/h
0 – 1	0		180	180		3,8		0	200
1 – 2	0		180	180		0		200	200
Σ									

a) Geg.:

$$v_A = 180\frac{km}{h} = 50{,}0\frac{m}{s}$$

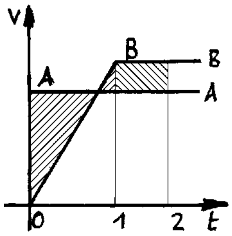
$$v_{B1} = 200\frac{km}{h} = 55{,}\bar{5}\frac{m}{s}$$



Wie lange beschleunigt Rennwagen B

$$a_{B01} = \frac{v_{B1} - \cancel{v_{B0}}}{\Delta t_{01}} \quad \rightarrow$$

$$\Delta t_{01} = \frac{v_{B1}}{a_{B01}} = \frac{55{,}\bar{5}\frac{m}{s}}{3{,}8\frac{m}{s^2}} = 14{,}61\,s$$

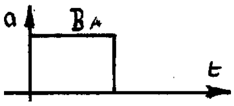


In der Zeit fahren die Rennwagen A und B:

$$v_A = \frac{\Delta s_{A01}}{\Delta t_{01}} \quad \rightarrow$$

$$\Delta s_{A01} = v_A \cdot t_1$$

$$= 50\frac{m}{s} \cdot 14{,}61\,s = 731{,}0\,m$$



$$\Delta s_{B01} = \frac{v_N^2 - v_V^2}{2 \cdot a_B} = \frac{v_{B1}^2}{2 \cdot a_B} = \frac{55{,}\bar{5}\frac{m^2}{s}}{2 \cdot 3{,}8\frac{m}{s^2}} = 406{,}1\,m$$

Danach muss Wagen B den Abstand mit Überschussgeschwindigkeit aufholen.

$$\Delta s_{A01,B01} = \Delta s_{A01} - \Delta s_{B01} = 731{,}0\,m - 406{,}1\,m = 324{,}9\,m$$

$$\Delta s_{A01,B01} = \Delta v_{A1,B1} \cdot \Delta t_{12} \quad \rightarrow$$

$$\Delta t_{12} = \frac{\Delta s_{A01,B01}}{\Delta v_{A1,B1}} = \frac{324{,}9\,m}{(55{,}\bar{5} - 50{,}0)\frac{m}{s}} = 58{,}5\,s$$

Daraus folgt die gesamte Einholzeit

$$t_{ges} = \Delta t_{01} + \Delta t_{12} = 14{,}61\,s + 58{,}5\,s = 73{,}1\,s$$

b) Die Lösung gibt es umständlich

$$\Delta s_{B02} = \Delta s_{B01} + \Delta s_{B12} = \frac{1}{2} \cdot a_{II} \cdot \Delta t_{01}^2 + v_{III} \cdot \Delta t_{12}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3{,}8\frac{m}{s^2} \cdot (14{,}61\,s)^2 + 55{,}\bar{5}\,s \cdot 58{,}57\,s = 3659\,m$$

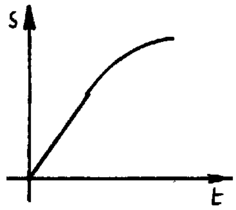
oder einfacher, wenn man berücksichtigt, dass beide Wagen denselben Weg zurücklegen.

$$\Delta s_{B02} = \Delta s_{A02} = v_A \cdot \Delta t_{02} = 50\frac{m}{s} \cdot 73{,}18\,s = 3659\,m$$

437

Weg	a	Δs	Δt	v_{Vorher}	$v_{Nachher}$
0 - 1	0		0,9s	v	v
1 – 2	-3,4m/s²			v	0
Σ		60m	18min		

Aus den beiden Wegabschnitten kann man eine quadratische Gleichung für v_0 aufstellen,

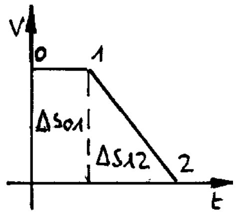


$$\Delta s_{01} = v \cdot \Delta t_{01}$$

$$\Delta s_{12} = \frac{\cancel{v_N^2} - v_V^2}{2a} = \frac{-v^2}{2a}$$

$$\Delta s_{02} = \Delta s_{01} + \Delta s_{12}$$

$$\Delta s_{02} = v_0 \cdot \Delta t_{01} - \frac{v_0^2}{2a}$$



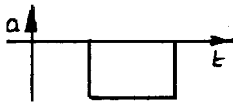
normieren,

$$0 = v_0^2 - 2a \cdot \Delta t_{01} \cdot v_0 + 2a \cdot \Delta s_{02}$$

Zahlen einsetzen

$$0 = v_0^2 - 2 \cdot (-3{,}4)\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}9\,s \cdot v_0$$

$$+ 2 \cdot (-3{,}4)\frac{m}{s^2} \cdot 60\,m$$



$$0 = v_0^2 + 6{,}12\frac{m}{s} \cdot v_0 - 408\frac{m^2}{s^2}$$

und mit der allgemeinen Lösung (41) für quadratische Gleichungen gelöst

$$0 = x^2 + p \cdot x + q \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$v_{0/1,2} = -\frac{(6{,}12\,m/s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6{,}12\,m/s}{2}\right)^2 + 408\frac{m^2}{s^2}}$$

$$v_0 = -3{,}06\frac{m}{s} \pm 20{,}43\frac{m}{s} = 17{,}4\frac{m}{s} = 62{,}5\frac{km}{h}$$

Die negative Lösung ist technisch nicht sinnvoll.

438 Gegeben:

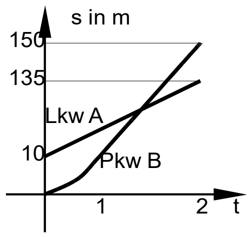
$$\Delta s_{A02} = 150\,m - 2 \cdot 5\,m - 10\,m - 5\,m$$

$$= 125\,m$$

$$\Delta s_{B02} = 150\,m$$

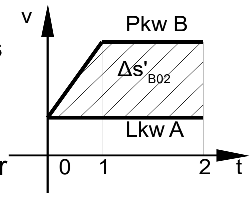
$$v_A = 72\frac{km}{h} = 72\frac{1000\,m}{3600\,s} = 20\frac{m}{s}$$

$$v_{B1} = 90\frac{km}{h} = 90\frac{1000\,m}{3600\,s} = 25\frac{m}{s}$$



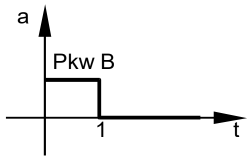
a) Dauer des Überholvorganges

während des Überholvorganges fährt der überholte Lkw A 125 m mit konstanter Geschwindigkeit, daraus folgt die Zeit, die dem Pkw für den Überholvorgang zur Verfügung steht:



$$v_A = \frac{\Delta s_{A02}}{\Delta t_{02}} \quad \rightarrow$$

$$\Delta t_{02} = \frac{\Delta s_{A02}}{v_A} = \frac{125\,m}{20\frac{m}{s}} = 6{,}25\,s$$



b) Beschleunigung des Pkw

I <u>Koordinatensystem im überholten Fahrzeug</u>

Aufgaben zu Überholvorgängen werden oft einfacher, wenn man sie aus einem der Fahrzeuge betrachtet. Relativ aus dem überholten Lkw A gesehen legt der Pkw 25 m mit 5 m/s zurück:

$$\Delta s'_{B02} = s_{B02} - s_{A02} = 150\,m - 125\,m = 25\,m$$

$$v'_{B0} = 0\,\frac{m}{s}$$

$$v'_{B1} = v_{B1} - v_A = 25\frac{m}{s} - 20\frac{m}{s} = 5\frac{m}{s}$$

Den Weg 25 m des Pkw findet man im v,t-Diagramm als Fläche über der Geschwindigkeit des Lkw.

$$\Delta s'_{B02} = \frac{(v_B - v_A)\cdot\Delta t_{01}}{2} + (v_B - v_A)\cdot(\Delta t_{02} - \Delta t_{01})$$

$$= \frac{(v_B - v_A)\cdot\Delta t_{01}}{2} + (v_B - v_A)\cdot\Delta t_{02} - (v_B - v_A)\cdot\Delta t_{01}$$

$$= (v_B - v_A)\cdot\Delta t_{02} - \frac{(v_B - v_A)}{2}\cdot\Delta t_{01}$$

$$25\,m = \left(5\frac{m}{s} - 0\right)\cdot 6{,}25\,s - \frac{(5-0)}{2}\frac{m}{s}\cdot\Delta t_{01} \quad \rightarrow \Delta t_{01} = 2{,}5\,s$$

Die Zeit eingesetzt in die Beschleunigungsgleichung

$$a_B = \frac{\Delta v'_{B01}}{\Delta t_{01}} = \frac{v'_{B1} - \cancel{v'_{B0}}}{t_1 - \cancel{t_0}} = \frac{v_{B1}}{t_1} = \frac{5\frac{m}{s}}{2{,}5\,s} = 2\frac{m}{s^2}$$

II <u>Mit Unterstützung des v,t-Diagrammes</u>

Wenn das Koordinatensystem im überholten Lkw liegt, beschleunigt der Pkw von 0 auf 5m/s und muss in 6,25s eine Strecke von 25m zurücklegen.

Wenn er konstant 5m/s führe, würde er zurücklegen:

$$\Delta s'_{B02} = v'_B\cdot\Delta t_{02} = 5\frac{m}{s}\cdot 6{,}25\,s = 31{,}25\,m$$

Die Streckendifferenz 31,25m – 25m = 6,25m entspricht der Strecke in der Beschleunigungsrampe:

$$a_B = \frac{v'^2_B - \cancel{v'^2_A}}{2\cdot\Delta s} = \frac{(5\,m/s)^2 - 0}{2\cdot 6{,}25\,m} = 2\frac{m}{s^2}$$

III <u>Gleichungssystem lösen</u>

Wer die obige Vereinfachung nicht findet, hat mehr zu tun, kommt aber auch ans Ziel:

	Pkw B				
Weg	a	Δs	Δt	v_{Vorher}	$v_{Nachher}$
0 - 1	?			v_A	v_B
1 – 2				v_B	v_B
Σ		150m	6,25s		

Gleichungen

$\Delta s_{01} = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2\cdot a_{B01}}$	$\Delta t_{01} = \frac{v_B - v_A}{a_{B01}}$
$\Delta s_{12} = v_B\cdot\Delta t_{12}$	
$\Delta s_{02} = \Delta s_{01} + \Delta s_{12}$	$\Delta t_{02} = \Delta t_{01} + \Delta t_{12} \rightarrow$ $\Delta t_{12} = \Delta t_{02} - \Delta t_{01}$

Montage:

$$\Delta s_{02} = \Delta s_{01} + \Delta s_{12}$$

$$\Delta s_{02} = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2\cdot a_{B01}} + v_B\cdot\Delta t_{12}$$

$$\Delta s_{02} = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2\cdot a_{B01}} + v_B\cdot(\Delta t_{02} - \Delta t_{01})$$

$$\Delta s_{02} = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2\cdot a_{B01}} + v_B\cdot\Delta t_{02} - v_B\cdot\left(\frac{v_B - v_A}{a_{B01}}\right)$$

Mit $2\cdot a_{B01}$ multiplizieren, auflösen und einsetzen.

$$2\cdot\Delta s_{02}\cdot a_{B01} = v_B^2 - v_A^2 + 2\cdot v_B\cdot\Delta t_{02}\cdot a_{B01} - 2\cdot v_B\cdot(v_B - v_A)$$

$$a_{B01} = \frac{v_B^2 - v_A^2 - 2\cdot v_B\cdot(v_B - v_A)}{2\cdot\Delta s_{02} - 2\cdot v_B\cdot\Delta t_{02}}$$

$$a_{B01} = \frac{\left(25\frac{m}{s}\right)^2 - \left(20\frac{m}{s}\right)^2 - 2\cdot 25\frac{m}{s}\cdot(25-20)\frac{m}{s}}{2\cdot 150\,m - 2\cdot 25\frac{m}{s}\cdot 6{,}25\,s} = 2\frac{m}{s^2}$$

IV <u>Ausprobieren ohne Vereinfachungen</u>

1. Annahme: a_{B01} = 1 m/s²

$$\Delta s_{B01} = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2\cdot a_{B01}} = \frac{(25\,m/s)^2 - (20\,m/s)^2}{2\cdot 1\,m/s^2} = 112{,}5\,m$$

$$\Delta t_{01} = \frac{v_B - v_A}{a_{B01}} = \frac{25\,m/s - 20\,m/s}{1\,m/s^2} = 5\,s$$

$$\Delta s_{12} = v_B\cdot\Delta t_{12} = 25\frac{m}{s}\cdot(6{,}25\,s - 5\,s) = 31{,}25\,m$$

$$\Delta s_{02} = \Delta s_{01} + \Delta s_{12} = 112{,}5\,m + 31{,}5\,m = 143{,}75\,m$$

→ etwas zu kurz ggü. 150 m

2. Annahme: a_{B01} = 1,5 m/s²

$$\Delta s_{B01} = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2\cdot a_{B01}} = \frac{(25\,m/s)^2 - (20\,m/s)^2}{2\cdot 1{,}5\,m/s^2} = 75\,m$$

$$\Delta t_{01} = \frac{v_B - v_A}{a_{B01}} = \frac{25\,m/s - 20\,m/s}{1{,}5\,m/s^2} = 3{,}33\,s$$

$$\Delta s_{12} = v_B\cdot\Delta t_{12} = 25\frac{m}{s}\cdot(6{,}25\,s - 3{,}33\,s) = 72{,}92\,m$$

$$\Delta s_{02} = \Delta s_{01} + \Delta s_{12} = 75\,m + 72{,}92\,m = 147{,}92\,m$$

→ immer noch zu kurz ggü. 150 m

3. Annahme: a_{B01} = 2 m/s²

$$\Delta s_{B01} = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2\cdot a_{B01}} = \frac{(25\,m/s)^2 - (20\,m/s)^2}{2\cdot 2\,m/s^2} = 56{,}25\,m$$

$$\Delta t_{01} = \frac{v_B - v_A}{a_{B01}} = \frac{25\,m/s - 20\,m/s}{2\,m/s^2} = 2{,}5\,s$$

$$\Delta s_{12} = v_B\cdot\Delta t_{12} = 25\frac{m}{s}\cdot(6{,}25\,s - 2{,}5\,s) = 93{,}75\,m$$

$$\Delta s_{02} = \Delta s_{01} + \Delta s_{12} = 56{,}25\,m + 93{,}75\,m = 150\,m$$

→ passt!

Quelle der Aufgaben: Alfred Böge / Walter Schlemmer: Aufgabensammlung Technische Mechanik, Vieweg+Teubner, Ausgaben ziemlich identisch seit mind. 1999

439

Weg	a	Δs	Δt	v_{Vorher}	$v_{Nachher}$
0 - 1	0	36m		1,2m/s	1,2m/s
1 – 2	2m/s²	7m		1,2m/s	v_2
2 – 3	--3m/s²	?		v_2	0,2m/s
Σ			?		

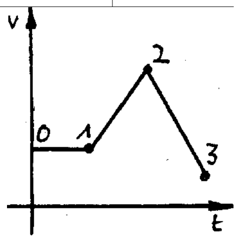
a)

$$\Delta s_{12}=\frac{v_2^2-v_1^2}{2\cdot a_{12}}\quad\rightarrow$$

$$v_2=\sqrt{v_1^2+2\text{a}\cdot\Delta s_{12}}$$

$$=\sqrt{\left(1{,}2\frac{m}{s}\right)^2+2\cdot 2\frac{m}{s^2}\cdot 7\,m}$$

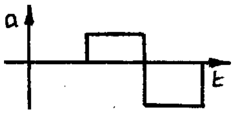
$$=5{,}426\frac{m}{s}$$



b)

$$\Delta s_{23}=\frac{v_3^2-v_2^2}{2\cdot a_{23}}$$

$$=\frac{\left(0{,}2\frac{m}{s}\right)^2-\left(5{,}426\frac{m}{s}\right)^2}{2\cdot(-3\,m/s^2)}=4{,}9\,m$$



c)

$$\Delta t_{01}=\frac{\Delta s_{01}}{v_{01}}=\frac{36\,m}{1{,}2\,m/s}=30\,s$$

$$\Delta t_{12}=\frac{\Delta v_{12}}{a_{12}}=\frac{v_2-v_1}{a_{12}}=\frac{5{,}426\,m/s-1{,}2\,m/s}{2\,m/s^2}=2{,}11\,s$$

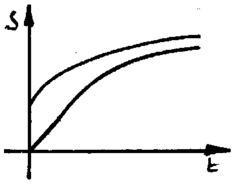
$$\Delta t_{23}=\frac{\Delta v_{23}}{a_{23}}=\frac{v_3-v_2}{a_{23}}=\frac{0{,}2\,m/s-5{,}426\,m/s}{-3\,m/s^2}=1{,}74\,s$$

$$\Delta t_{03}=\Delta t_{01}+\Delta t_{12}+\Delta t_{23}=30\,s+2{,}11\,s+1{,}74\,s=33{,}85\,s$$

440 Gegeben:

$$v_{A0}=v_{B0}=v_{B1}=60\frac{km}{h}$$

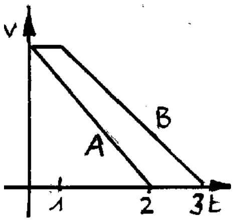
$$=60\frac{1000\,m}{3600\,s}=16{,}\bar{6}\frac{m}{s}$$

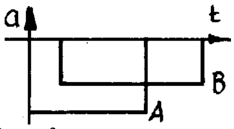


Bremsweg des vorderen Fahrzeuges A

$$\Delta s_{A02}=\frac{\cancel{v_{A2}^2}-v_{A0}^2}{2\cdot a_A}$$

$$=\frac{-(16{,}\bar{6}\frac{m}{s})^2}{2\cdot(-5\frac{m}{s^2})}=27{,}\bar{7}\,m$$





Bremsweg des hinteren Fahrzeuges B

$$\Delta s_{B03}=\Delta s_{B01}+\Delta s_{B13}=v_{B1}\cdot\Delta t_{01}+\frac{\cancel{v_{B3}^2}-v_{B1}^2}{2\cdot a_A}$$

$$=16{,}\bar{6}\frac{m}{s}\cdot 1\,s+\frac{-(16{,}\bar{6}\frac{m}{s})^2}{2\cdot(-3{,}5\frac{m}{s^2})}=16{,}\bar{6}\,m+39{,}68\,m=56{,}35\,m$$

Daraus folgt der Mindestabstand:

$$\Delta s_{mind}=\Delta s_{B03}-\Delta s_{A02}=56{,}35\,m-27{,}\bar{7}\,m=28{,}6\,m$$

441

Weg	a	Δs	Δt	v_{Vorher}	$v_{Nachher}$
0 - 1	-9,81m/s²			0	v1
1 – 2	40m/s²			v1	0
Σ		-18m			

Gleichungen aufstellen:

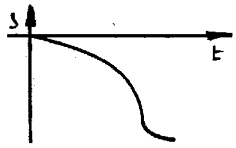
$$\Delta s_{12}=\frac{\cancel{v_2^2}-v_1^2}{2\cdot a_{12}}=\frac{-v_1^2}{2\cdot a_{12}}$$

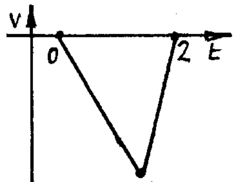
$$\Delta s_{01}=\frac{v_1^2-\cancel{v_0^2}}{2\cdot a_{01}}=\frac{v_1^2}{2\cdot a_{01}}$$

$$\rightarrow\quad v_1=\pm\sqrt{2\cdot a_{01}\cdot\Delta s_{01}}$$

$$\Delta s_{02}=\Delta s_{01}+\Delta s_{12}$$

$$\rightarrow\quad\Delta s_{01}=\Delta s_{02}-\Delta s_{12}$$

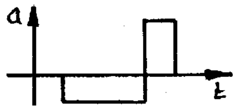




Montage der Formeln:

$$\Delta s_{12}=\frac{-v_1^2}{2\cdot a_{12}}$$

$$\Delta s_{12}=\frac{-\left(\pm\sqrt{2\cdot a_{01}\cdot\Delta s_{01}}\right)^2}{2\cdot a_{12}}$$



Hinweis: Das Vorzeichen von v_1 spielt keine Rolle, aber das Minus vor v_1^2 bleibt erhalten!

$$\Delta s_{12}=\frac{-2\cdot a_{01}\cdot\Delta s_{01}}{2\cdot a_{12}}$$

$$-\frac{a_{12}}{a_{01}}\cdot\Delta s_{12}=\Delta s_{01}=\Delta s_{02}-\Delta s_{12}$$

$$\Delta s_{12}-\frac{a_{12}}{a_{01}}\cdot\Delta s_{12}=\Delta s_{02}$$

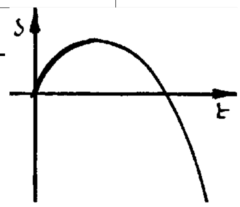
$$\Delta s_{12}=\frac{\Delta s_{02}}{1-\frac{a_{12}}{a_{01}}}=\frac{-18\,m}{1-\frac{40\text{m}/s^2}{-9{,}81\,m/s^2}}=-3{,}55\,m$$

Δs_{12} ist hier negativ, weil die Bewegung nach unten erfolgt (→ s,t-Diagramm). Die Bremse muss spätestens 3,55 m über dem Boden greifen.

442

Weg	a	Δs	Δt	v_{Vorher}	$v_{Nachher}$
0 - 1	-9,81m/s²			v0	0
1 – 2	-9,81m/s²			0	v2
0 – 2	-9,81m/s²	-60m	6s	v0	v2

Hinweis: Da die Beschleunigung konstant ist, gelten alle Formeln ungeachtet des Richtungswechsels der Bewegung. Ihre Teilung ist nur wegen der Gipfelhöhe erforderlich.

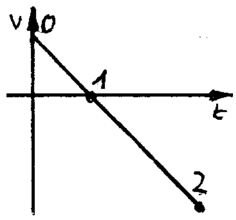


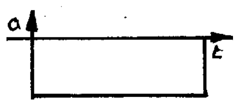
a)

$$v_0=\frac{\Delta s_{02}}{\Delta t_{02}}-\frac{1}{2}\cdot a\cdot\Delta t_{02}$$

$$=\frac{-60\,m}{6\,s}-\frac{1}{2}\cdot(-9{,}81\frac{m}{s^2})\cdot 6\,s$$

$$=19{,}43\frac{m}{s}$$





b) $v_2 = v_t = \pm\sqrt{v_0 + 2\cdot a_{02}\cdot\Delta s_{02}}$

$$= \pm\sqrt{\left(19{,}43\frac{m}{s}\right)^2 - 2\cdot(-9{,}81\frac{m}{s^2})\cdot(-60\mathrm{m})} = -39{,}43\frac{m}{s}$$

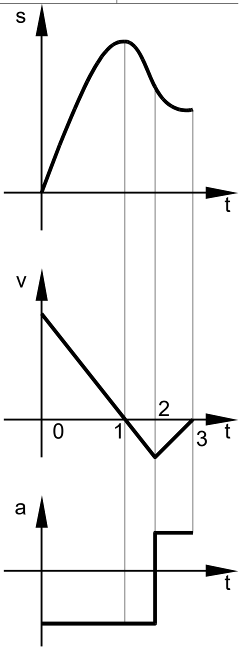
Die positive Lösung ist nicht sinnvoll.

c) Freier Fall, z.B. Gleichung (3):

$$\Delta s_{12} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\cdot a} = \frac{(-39{,}43\frac{m}{s})^2 - 0}{2\cdot(-9{,}81\frac{m}{s^2})} = -79{,}24\,m = h$$

443

Weg	a	Δs	Δt	v_{Vorher}	$v_{Nachher}$
0 – 1	-9,81m/s²			4m/s	0
1 – 2	-9,81m/s²			0	v2
0 – 2	-9,81m/s²		0,5s	4m/s	v2
2 – 3			0,25s	v2	0



a) Zeit bis zum 1. Stillstand (Totpunkt, bei dem der Fahrstuhl die Bewegungsrichtung wechselt):

$$\Delta t_{01} = \frac{v_1 - v_0}{a_{01}}$$

$$= \frac{0 - 4\frac{m}{s}}{-9{,}81\frac{m}{s^2}} = 0{,}408\,s$$

Weg bis zum 1. Stillstand:

$$\Delta s_{12} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\cdot a}$$

$$= \frac{0 - (4\frac{m}{s})^2}{2\cdot(-9{,}81\frac{m}{s^2})} = 0{,}815\,m$$

b) Geschwindigkeit nach 0,5s:

$$v_2 = v_0 + a_{02}\cdot\Delta t_{02}$$

$$= 4\frac{m}{s} - 9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot 0{,}5\,s = -0{,}905\frac{m}{s}$$

Die Geschwindigkeit wirkt nach unten, da im gewählten Koordinatensystem positiv oben ist.

c) Mit Fallweg meint die Aufgabe den Weg vom 1. Totpunkt bis zum 2. (endgültigen) Stillstand (t_3).

$$\Delta s_{12} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\cdot a_{01}} = \frac{\left(-0{,}905\frac{m}{s}\right)^2 - 0}{2\cdot(-9{,}81\frac{m}{s^2})} = -0{,}042\,mm$$

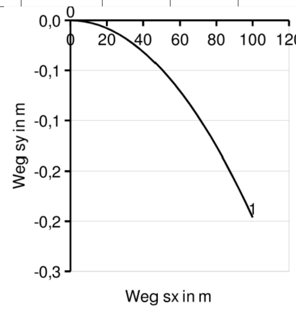
$$\Delta s_{23} = \frac{v_3 + v_2}{2}\cdot\Delta t_{23} = \frac{-0{,}905\frac{m}{s} + 0}{2}\cdot 0{,}25\,s = -0{,}113\,m$$

$$\Delta s_{13} = \Delta s_{12} + \Delta s_{23} = -0{,}042\,mm - 0{,}113\,m = -0{,}155\,m$$

Waagerechter Wurf

444

	a_x	Δs_x	v_{0x}	v_{1x}	Δt	a_y	Δs_y	v_{0y}	v_{1y}
0 – 1	0 m/s²	100 m	500 m/s	500 m/s		-9,81 m/s²		0 km/h	



a) In dieser Aufgabenstellung wird die Flugdauer von der Anfangsgeschwindigkeit und den Weg in waagerechter Richtung bestimmt. Gleichung (2c):

$$\Delta t_{01} = \frac{\Delta s_{x01}}{v_{xm}}$$

$$= \frac{100\,m}{500\,m/s} = 0{,}5\,s$$

In der dieser Zeit sinkt das Geschoss um (Glchg. 5b):

$$\Delta s_{y01} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\Delta t_{01}^2 + v_{y0}\cdot\Delta t_{01}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(-9{,}81\frac{m}{s})\cdot(0{,}2\,s)^2 + 0 = -0{,}196\,m$$

v_{y0} = 0 und Δt_{01} eingesetzt in Δs_y:

$$\Delta s_{y01} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\left(\frac{\Delta s_{x01}}{v_{xm}}\right)^2$$

In der Schreibweise der Aufgabe erhält man den Zusammenhang zwischen Wurfhöhe h, Wurfweite s_x und Wurfgeschwindigkeit v_x:

$$h = \frac{1}{2}\cdot g\cdot\left(\frac{s_x}{v_x}\right)^2 \qquad (13)$$

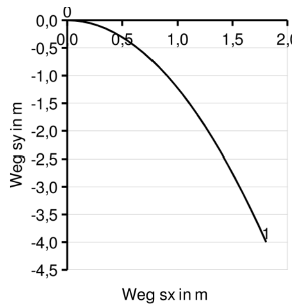
b)

$$h(v_x = 1000\frac{m}{s}) = \frac{1}{2}\cdot(-9{,}81\frac{m}{s^2})\cdot\left(\frac{100\,m}{1000\frac{m}{s}}\right)^2$$

$$= -0{,}049\,m$$

Mit der doppelten Geschwindigkeit fällt das Geschoss nur noch ein Viertel des Weges.

445



a) Aus Gleichung (13)

$$h = \frac{1}{2}\cdot g\cdot\left(\frac{s_x}{v_x}\right)^2$$

erhält man durch Umformung die Wurfweite s_x bei waagerechtem Wurf :

$$s_x = v_x\cdot\sqrt{\frac{2\cdot h}{g}}$$

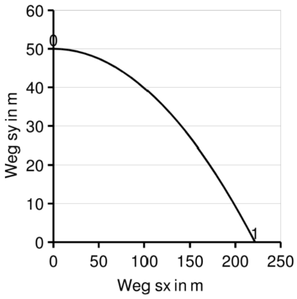
b) und Zahlen eingesetzt:

$$s_x = 2\frac{m}{s}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 4\,m}{9{,}81\frac{m}{s^2}}} = 1{,}81\,m$$

$$l_2 = l_1 - s_x = 4\,m - 1{,}81\,m = 2{,}19\,m$$

446 Gegeben:

$$v_x = 250\frac{km}{h} = 69{,}4\frac{m}{s}$$



a) Gleichung (13) für die Wurfweite bei waagerechten Wurf:

$$s_x = v_x \cdot \sqrt{\frac{2\cdot h}{g}}$$

$$= 69{,}4\frac{m}{s}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 50\,m}{9{,}81\frac{m}{s^2}}}$$

$$= 221{,}7\,m$$

b) Aus (Gleichung. 3e) und v_{y0} = 0; a = G:

$$v_1 = \pm\sqrt{v_0^2 + 2\,a\cdot\Delta s}$$

folgt die senkrechte Aufprallgeschwindigkeit

$$v_y = \sqrt{2\cdot g\cdot h} = \sqrt{2\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot 50\text{m}} = 31{,}3\frac{m}{s} \qquad (7)$$

die Gesamtgeschwindigkeit v mit Gleichung (10)

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(69{,}4\frac{m}{s}\right)^2 + \left(31{,}3\frac{m}{s}\right)^2} = 76{,}2$$

und den Aufprallwinkel α nach Gleichung (11)

$$\alpha = \arctan\frac{v_y}{v_x} = \arctan\frac{31{,}3\frac{m}{s}}{69{,}4\frac{m}{s}} = 24{,}3\,°$$

447 Gegeben:

a) Aus Gleichung (13)

$$h = \frac{1}{2}\cdot g\cdot\left(\frac{s_x}{v_x}\right)^2$$

erhält man durch Umformen die erforderliche Geschwindigkeit v_x

$$v_x = s_x\cdot\sqrt{\frac{g}{2\cdot h}}$$

und mit Zahlen das Ergebnis

$$v_x = s_x\cdot\sqrt{\frac{g}{2\cdot h}} = 0{,}6\,m\cdot\sqrt{\frac{9{,}81\frac{m}{s}}{2\cdot 1\text{m}}} = 1{,}33\frac{m}{s}$$

b) Die notwendige Höhe h_2 berechnet man üblicherweise mit dem dem Energieerhaltungssatz und setzt die potentielle Energie am höchsten Punkt gleich der Geschwindigkeitsenergie am niedrigsten Punkt. Das führt zu den Gleichungen:

$$m\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 \quad\rightarrow\quad v = \sqrt{2\cdot g\cdot h}$$

In der Aufgabe wurde die Rotationsenergie ausgeschlossen, da sie einen Teil der potentiellen Energie auf Kosten der Geschwindigkeit aufzehrt.

Will man die Antworten aus den Bewegungsgleichungen finden, kann man sich vorstellen, dass die Kugeln erst die Höhe h_2 im freien Fall fallen und dann ihre senkrechte Bewegung an einer 45°-Schräge in eine waagerechte Bewegung ändern. Aus dieser Überlegung heraus kann man die Gleichung (7) für den freien Fall verwenden:

$$h = \frac{v_x^2}{2\,g} = \frac{\left(1{,}33\frac{m}{s}\right)^2}{2\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}} = 0{,}090\,m = 9\,cm$$

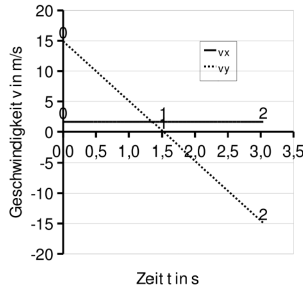
Schräger Wurf

448

	x	x	x	x	x-y	y	y	y	y
Weg	a m/s²	Δs m	v_{Vor} m/s	v_{Nach} m/s	Δt	a m/s²	Δs	v_{Vor} km/h	v_{Nach} km/h
0 – 1	0		vx0			-9,81	5m	vy0	

Gegeben

$$s_{xmax} = \frac{l}{2} = \frac{10\,m}{2} = 5\text{m}$$



a) Zusammengesetzte Bewegungen sind durch die Zeit Δt verknüpft.
Die Flugdauer eines Wassertropfens wird mit der senkrechten Komponente seiner Anfangsgeschw. v_y festgelegt. Als Randbedingung wählt man Δs_{y02}=0 und erhält aus :

(5c) $$\Delta t_{a,b} = -\frac{v_v}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{v_v}{a}\right)^2 + \frac{2\,\Delta s}{a}} \quad\rightarrow$$

$$\Delta t_{02a} = 0 \quad\text{oder}\quad \Delta t_{02b} = 2\frac{v_{y0}}{g}$$

Beide Lösungen sind richtig, aber nur Variante b ist hier brauchbar.

Einfacher wird es mit der Randbedingung v_{y1}=0:

(2c) $$\Delta t = \frac{v_1 - v_0}{a} \quad\rightarrow$$

$$\Delta t_{01} = \frac{v_{y0}}{g} = \frac{1}{2}\Delta t_{02}$$

In der Zeit Δt_{02} bewegen sich die Wassertropfen in x-Richtung, daraus ergibt sich die Flugweite:

(1c) $$\Delta s = \Delta t\cdot v_m \quad\rightarrow$$

$$\Delta s_{x02} = \Delta t_{02}\cdot v_{x0} = s_{xmax}$$

Δt_{02} einsetzen und umrühren

$$s_{xmax} = \Delta t_{02}\cdot v_{x0} = 2\frac{v_{y0}}{g}\cdot v_{xo}$$

$$g\cdot s_{xmax} = 2\,v_0\cdot\sin\alpha\cdot v_o\cdot\cos\alpha$$

$$\frac{g\cdot s_{xmax}}{v_0^2} = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

Mithilfe www.wolframalpha.com oder einer guten Formelsammlung findet man das Additionstheorem

$$2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \sin 2\,\alpha$$

und kann auflösen

$$2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{g\cdot s_{xmax}}{v_0^2}$$

$$\sin 2\,\alpha = \frac{g\cdot s_{xmax}}{v_0^2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{g\cdot s_{xmax}}{v_0^2}\right) \qquad (14)$$

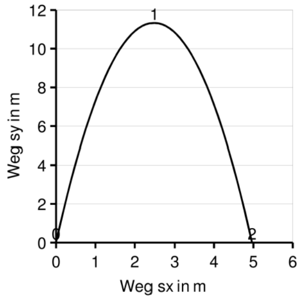
b) Mit Zahlen:

$$\alpha = \frac{1}{2}\arcsin\frac{g\cdot s_{xmax}}{v_0^2}$$

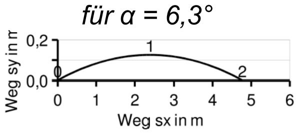
$$= \frac{1}{2}\arcsin\frac{9{,}81\,\frac{m}{s^2}\cdot 5\,m}{\left(15\,\frac{m}{s}\right)^2}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\cdot 12{,}6\,° = 6{,}3\,°$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\cdot 167{,}4\,° = 83{,}7\,°$$



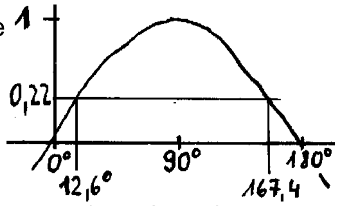
für α = 6,3°



für α = 6,3°

Die Arcussinus-Funktion ist nicht eindeutig und liefert mindestens 2 Ergebnisse (siehe Bilder).

In diesem Fall sind beide Ergebnisse technisch sinnvoll, denn der Rasensprenger erreicht die Weite mit beiden Einstellungen. Zu wählen ist die steile Einstellung, weil mit der flachen Einstellungen s_{xmax} überschritten wird und zwar für alle Winkel 83,7° > α > 6,3°.



Verlauf der Sinusfunktion

449 Gleichung (14):

$$v_0 = \sqrt{\frac{g\cdot s_x}{\sin 2\,\alpha}} = \sqrt{\frac{9{,}81\,\frac{m}{s^2}\cdot 90\,m}{\sin(2\cdot 40\,°)}} = 29{,}9\,\frac{m}{s}$$

450 Gegeben Gleichung (12):

$$v_{x0} = v_0\cdot\cos\alpha$$

$$= 600\,\frac{m}{s}\cdot\cos 70\,° = 205{,}2\,\frac{m}{s}$$

$$v_{y0} = v_0\cdot\sin\alpha$$

$$= 600\,\frac{m}{s}\cdot\sin 70\,° = 563{,}8\,\frac{m}{s}$$

Wie lange braucht das Geschoss bis zur Höhe 4000 m? Gerechnet wird die senkrechte Komponente:

$$\text{(5c)}\quad \Delta t = -\frac{v_{y0}}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{v_{y0}}{a}\right)^2 + 2\cdot\frac{\Delta s_{y01}}{a}}$$

$$= -\frac{563{,}8\,\frac{m}{s}}{-9{,}81\,\frac{m}{s^2}} \pm \sqrt{\left(\frac{563{,}8\,\frac{m}{s}}{-9{,}81\,\frac{m}{s^2}}\right)^2 + 2\cdot\frac{4000\,m}{-9{,}81\,\frac{m}{s^2}}}$$

$$= 57{,}5\,s \pm 49{,}9\,s$$

$$\Delta t_{01} = 7{,}6\,s\ \text{(Steigflug)} \qquad \Delta t_{02} = 107{,}4\,s\ \text{(Sinkflug)}$$

Die zweite Passage der Höhe beim Sinkflug passt nicht zur Aufgabenstellung.

Wie weit fliegt das Geschoss in dieser Zeit horizontal? Gleichung (1) mit $v_m = v_{x0}$:

$$\Delta s_{x01} = +v_{x0}\cdot\Delta t_{01}$$

$$= 205{,}2\,\frac{m}{s}\cdot 7{,}6\,s = 1560\,m$$

Die horizontale Abweichung beträgt

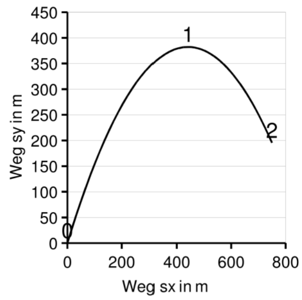
$$\Delta s_{xAB} = s_{x01} - s_{xB} = 1560\,m - \frac{4000\,m}{\tan 70\,°}$$

$$= 1560\,m - 1456\,m = 104\,m$$

451 Gegeben Gleichung (12):

$$v_{x0} = v_0\cdot\cos\alpha$$

$$v_{y0} = v_0\cdot\sin\alpha$$



a) Wie weit fliegt das Geschoss in dieser Zeit horizontal? Gleichung (1) mit $v_m = v_{x0}$:

$$\Delta s_x = +v_{x0}\cdot\Delta t$$

$$= v_0\cdot\cos\alpha\cdot\Delta t$$

$$= 100\,\frac{m}{s}\cdot\cos\alpha\cdot 15\text{s}$$

$$= 750\,m$$

b) Wie hoch fliegt ein Geschoss während der Zeit Δt? Die Endgeschwindigkeit spielt keine Rolle, also Gleichung (5) mit a = -g:

$$h = \Delta s_{y01}$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot g\cdot\Delta t^2 + v_{y0}\cdot\Delta t$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot g\cdot\Delta t^2 + v_0\cdot\sin\alpha\cdot\Delta t$$

Mit Zahlen

$$h = -\frac{1}{2}\cdot g\cdot\Delta t^2 + v_0\cdot\sin\alpha\cdot\Delta t$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}\cdot(15\,s)^2 + 100\,\frac{m}{s}\cdot\sin 70\,°\cdot 15\text{s}$$

$$= 195\,m$$

452 Lückenbüßer für einen Zählfehler

Quelle der Aufgaben: Alfred Böge / Walter Schlemmer: Aufgabensammlung Technische Mechanik, Vieweg+Teubner, Ausgaben ziemlich identisch seit mind. 1999

Gleichförmige Drehbewegung

453 Gleichung (29):

$$v_u = \pi \cdot d \cdot n = \pi \cdot 35\,mm \cdot 2800\,min^{-1}$$
$$= 308\,\frac{m}{min} = 5{,}1\,\frac{m}{s}$$

454 Gleichung (26):

$$v_u = \frac{U}{\Delta t_{1U}} = \frac{2\pi \cdot 6280\,km}{1\,Tag}$$
$$= \frac{40000\,km}{d} = \frac{1670\,km}{h} = \frac{464\,m}{s}$$

455 Gleichung (29):

$$v_u = \pi \cdot d \cdot n = \pi \cdot 1650\,mm \cdot 3000\,min^{-1}$$
$$= 15551\,\frac{m}{min} = 259\,\frac{m}{s}$$

456

a) Gleichung (40):

$$v_u = v_m = 25\,\frac{km}{h} = 25\,\frac{1000\text{m}}{3600\text{s}} = 6{,}94\,\frac{m}{s}$$

b) Gleichung (29):

$$v_u = \pi \cdot d \cdot n \quad \rightarrow$$
$$n = \frac{v_u}{\pi \cdot d} = \frac{6{,}94\,\frac{m}{s}}{\pi \cdot 28''} = \frac{6{,}94\,\frac{m}{s}}{\pi \cdot 28 \cdot 25{,}4\,mm}$$
$$= 3{,}11\,s^{-1} = 186\,min^{-1}$$

457 Gleichung (29):

$$v_u = \pi \cdot d \cdot n \quad \rightarrow$$
$$d = \frac{v_u}{\pi \cdot n} = \frac{37\,\frac{m}{min}}{\pi \cdot 250\,min^{-1}} = 47{,}1\,mm$$

458 Gleichung (29):

$$v_u = \pi \cdot d \cdot n \quad \rightarrow$$
$$d = \frac{v_u}{\pi \cdot n} = \frac{40\,\frac{m}{s}}{\pi \cdot 2800\,\frac{1}{min}} = \frac{40\,m \cdot min}{\pi \cdot 2800\,s} = \frac{40\,m \cdot 60\,s}{\pi \cdot 2800\,s}$$
$$= 272\,mm$$

459

a) Das nutzbare Schleifkörpervolumen beträgt (t = Dicke):

$$V_{nutz} = \left(\frac{\pi \cdot d_{max}^2}{4} - \frac{\pi \cdot d_{min}^2}{4}\right) \cdot t = \frac{\pi}{4} \cdot (d_{max}^2 - d_{min}^2) \cdot t$$

Nachdem die Hälfte davon abgenutzt ist, beträgt das Volumen des Schleifkörpers V_m :

$$V_m = \frac{\pi \cdot d_{max}^2}{4} \cdot t - \frac{v_{nutz}}{4}$$
$$= \frac{\pi \cdot d_{max}^2}{4} \cdot t - \frac{\frac{\pi}{4} \cdot (d_{max}^2 - d_{min}^2) \cdot t}{2}$$
$$= \frac{\pi}{4} \cdot t \cdot \frac{d_{max}^2 + d_{min}^2}{2}$$

Dieses Volumen kann man mit seinem Durchmesser d_m darstellen:

$$V_m = \frac{\pi \cdot d_m^2}{4} \cdot t$$

Wenn man die beiden gleich setzt, erhält man den Durchmesser d_m für das mittlere nutzbare Volumen:

$$\frac{\pi \cdot d_m^2}{4} \cdot t = v_m = \frac{\pi}{4} \cdot t \cdot \frac{d_{max}^2 + d_{min}^2}{2}$$
$$d_m^2 = \frac{d_{max}^2 + d_{min}^2}{2}$$
$$d_m = \sqrt{\frac{d_{max}^2 + d_{min}^2}{2}}$$

Mit Zahlen:

$$d_m = \sqrt{\frac{400^2 + 180^2}{2}}\,mm = 310{,}2\,mm$$

b) Gleichung (29):

$$v_u = \pi \cdot d \cdot n \quad \rightarrow$$
$$n_I = \frac{v_u}{\pi \cdot d} = \frac{30\,\frac{m}{s}}{\pi \cdot 400\text{mm}} = 23{,}8\,s^{-1} = 1432\,min^{-1}$$
$$n_{II} = \frac{v_u}{\pi \cdot d} = \frac{30\,\frac{m}{s}}{\pi \cdot 310\text{mm}} = 30{,}8\,s^{-1} = 1848\,min^{-1}$$

460 Gleichung (18):

a) Stundenzeiger

$$\omega_h = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi\,rad}{12\,h} = 0{,}523\,\frac{rad}{h} = 0{,}145 \cdot 10^{-3}\,\frac{rad}{s}$$
$$\omega_h = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{360\,°}{12\,h} = \frac{30\,°}{h} = 8{,}33 \cdot 10^{-3}\,\frac{°}{s}$$

b) Minutenzeiger

$$\omega_m = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi\,rad}{60\,min} = 6{,}28\,\frac{rad}{h} = 1{,}74 \cdot 10^{-3}\,\frac{rad}{s}$$
$$\omega_m = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{360\,°}{60\,min} = \frac{360\,°}{h} = 0{,}100\,\frac{°}{s} = 0{,}5\,\frac{°}{min}$$

c) Sekundenzeiger

$$\omega_s = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi\,rad}{60\,s} = 377\,\frac{rad}{h} = 0{,}105\,\frac{rad}{s}$$
$$\omega_s = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{360\,°}{60\text{s}} = \frac{21600\,°}{h} = 6\,\frac{°}{s}$$

461 Gleichung (30):

a)

$$v_u = \omega \cdot r = \omega \cdot \frac{d}{2} = 18{,}7\,\frac{rad}{s} \cdot \frac{120\,mm}{2} = 1{,}12\,\frac{m}{s}$$

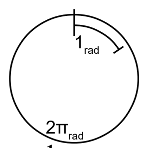
b)

$$v_u = \omega \cdot r = \omega \cdot \frac{d}{2} = 18{,}7\,\frac{rad}{s} \cdot \frac{180\,mm}{2} = 1{,}68\,\frac{m}{s}$$

c)

$$v_u = \omega \cdot r = \omega \cdot \frac{d}{2} = 18{,}7\,\frac{rad}{s} \cdot \frac{240\,mm}{2} = 2{,}24\,\frac{m}{s}$$

462



a) Gleichung (29):

$$v_u = \pi \cdot d \cdot n \quad \rightarrow$$
$$n = \frac{v_u}{\pi \cdot d} = \frac{v_u}{\pi \cdot 2 \cdot r} = \frac{120\,\frac{km}{h}}{\pi \cdot 2 \cdot 310\,mm} = 17{,}1\,\frac{1}{s} = 1027\,\frac{1}{min}$$

b) Gleichung (30):

$$v_u = \omega \cdot r \quad \rightarrow$$
$$\omega = \frac{v_u}{r} = \frac{120\,\frac{km}{h}}{310\,mm} = 107{,}5\,\frac{rad}{s} \cdot \frac{U}{2\pi_{rad}} = 1027\,\frac{1}{min}$$

463

a) Gleichung (1) und (40):

$$v_u = v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{3600\,m}{4\,min} = 900\,\frac{m}{min} = 15\,\frac{m}{s}$$

b) Gleichung (29):

$v_u = \pi \cdot d \cdot n \quad \rightarrow$

$$d = \frac{v_u}{\pi \cdot n} = \frac{900\,\frac{m}{min}}{\pi \cdot \frac{1750}{4\,min}} = 655\,mm$$

c) Gleichung (25):

$$\omega = 2\pi \cdot n = 2\pi \cdot \frac{1750}{4\,min} = 2749\,\frac{rad}{min} = 45{,}6\,\frac{rad}{s}$$

464

a) Gleichung (26):

$$n = \frac{z}{\Delta t} = \frac{\frac{180°}{360°}}{8s} = \frac{0{,}5}{8s} = \frac{1}{16\,s} = 0{,}0625\,\frac{1}{s}$$

b) Gleichung (25):

$$\omega = 2\pi_{rad} \cdot n = \frac{2\pi_{rad}}{16s} = 0{,}393\,\frac{rad}{s}$$

c) Gleichung (30):

$$v_u = \omega \cdot r = 0{,}393\,\frac{rad}{s} \cdot 5{,}4\,m$$

465

a) Gleichung (25):

$$\omega = 2\pi_{rad} \cdot n = 2\pi_{rad} \cdot \frac{24}{min} = 150{,}8\,\frac{rad}{min} = 2{,}51\,\frac{rad}{s}$$

b) Gleichung (30):

$$v_u = \omega \cdot r = 150{,}8\,\frac{rad}{min} \cdot 150\,mm = 22{,}6\,\frac{m}{min} = 0{,}377\,\frac{m}{s}$$

c) Am höchsten und tiefsten Punkt des Kurbelkreises stimmen die Umfangsgeschwindigkeiten von Kurbelzapfen und Kulissenhebel (KH) überein.
Gleichung (30):

$v_u = \omega \cdot r \quad \rightarrow$

$$\omega_{KH\,oben} = \frac{v_u}{l_2 + r} = \frac{0{,}377\,\frac{m}{s}}{600\,mm + 150\,mm} = 0{,}503\,\frac{rad}{s}$$

$$\omega_{KH\,unten} = \frac{v_u}{l_2 - r} = \frac{0{,}377\,\frac{m}{s}}{600\,mm - 150\,mm} = 0{,}838\,\frac{rad}{s}$$

d) Gleichung (30):

$$v_u = \omega_{KH\,oben} \cdot l_1$$
$$= 0{,}503\,\frac{rad}{s} \cdot 900\,mm = 0{,}452\,\frac{m}{s} = 27{,}1\,\frac{m}{min}$$

466

a) Gleichung (29):

$$v_r = \pi \cdot d_1 \cdot n_1 = \pi \cdot 111\,mm \cdot \frac{900}{min} = 313{,}8\,\frac{m}{min}$$

b) Gleichung (25):

$$\omega = 2\pi_{rad} \cdot n_1 = 2\pi_{rad} \cdot \frac{900}{min} = 5655\,\frac{rad}{min} = 94{,}2\,\frac{rad}{s}$$

c) Gleichung (29)

$v_r = \pi \cdot d \cdot n \quad \rightarrow$

$$d = \frac{v_r}{\pi \cdot n_2} = \frac{313{,}8\,\frac{m}{min}}{\pi \cdot 225\,\frac{1}{min}} = 444\,mm$$

467

a) Gleichung (29):

$v_u = \pi \cdot d \cdot n \quad \rightarrow$

$$n_2 = \frac{v_u}{\pi \cdot d_2} = \frac{26\,\frac{m}{s}}{\pi \cdot 280\,mm} = 29{,}6\,\frac{U}{s} = 1773\,\frac{U}{min}$$

b) Gleichung (29):

$$v_u = \pi \cdot d_1 \cdot n_1 = \pi \cdot d_2 \cdot n_2$$
$$d_1 \cdot n_1 = d_2 \cdot n_2 \quad \rightarrow$$
$$d_1 = d_2 \cdot \frac{n_2}{n_1} = 100\,mm \cdot \frac{1773\,min^{-1}}{960\,min^{-1}} = 185\,mm$$

c) Gleichung (29):

$$v_u = \pi \cdot d_2 \cdot n_2 = \pi \cdot 100\,mm \cdot 1773\,\frac{1}{min} = 557\,mm$$

468

a) Gleichung (39):

$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1} \quad \rightarrow$

$$n_2 = \frac{n_1}{i} = \frac{1420\,\frac{1}{min}}{3{,}5} = 405{,}8\,\frac{U}{min}$$

b) Gleichung (39):

$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1} \quad \rightarrow$

$$d_1 = \frac{d_2}{i} = \frac{320\,mm}{3{,}5} = 91{,}4\,mm$$

c) Gleichung (29)

$$v_u = \pi \cdot d_1 \cdot n_1 = \pi \cdot d_2 \cdot n_2$$
$$= \pi \cdot 91{,}4\,mm \cdot 1420\,\frac{1}{min} = \pi \cdot 320\,mm \cdot 405{,}8\,\frac{1}{min}$$
$$= 407\,\frac{m}{min} = 6{,}80\,\frac{m}{s}$$

469 Gegeben

$$z_2 = 85 \cdot \frac{360°}{90°} = 340$$

Gleichung (39) (u = Umdrehungen):

$$i = \frac{z_2}{z_1} = \frac{340}{14} = 24{,}28$$

$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{u_1}{u_2} \quad \rightarrow$

$$u_1 = i \cdot u_2 = 24{,}28 \cdot \frac{80°}{360°} = 5{,}40$$

470 Gleichung (39) (u = Umdrehungen):

$$i=\frac{n_1}{n_2}=\frac{d_2}{d_1} \quad \rightarrow \quad d_1=d_2\cdot\frac{n_2}{n_1}$$

a)

$$d_1=d_2\cdot\frac{n_2}{n_1}=200\,mm\cdot\frac{33\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{min}}{1500\cdot\frac{1}{min}}=4{,}44\,mm$$

b)

$$d_1=d_2\cdot\frac{n_2}{n_1}=200\,mm\cdot\frac{45\cdot\frac{1}{min}}{1500\cdot\frac{1}{min}}=6{,}00\,mm$$

c)

$$d_1=d_2\cdot\frac{n_2}{n_1}=200\,mm\cdot\frac{78\cdot\frac{1}{min}}{1500\cdot\frac{1}{min}}=10{,}40\,mm$$

471

a) Gleichung (29):

$$v_u=\pi\cdot d\cdot n \quad \rightarrow$$

$$n_{Rad}=\frac{v_u}{\pi\cdot d_{Rad}}=\frac{180\frac{m}{min}}{\pi\cdot 60\,cm}=95{,}5\frac{U}{min}$$

Gleichung (39):

$$i=\frac{n_1}{n_2}=\frac{z_2}{z_1}\cdot(\frac{z_4}{z_3}...) \quad \rightarrow$$

$$i=\frac{n_1}{n_2}=\frac{1430\,min^{-1}}{95{,}5\,min^{-1}}=15{,}0$$

$$z_2=i\cdot z_1\cdot\frac{z_3}{z_4}=15{,}0\cdot 17\cdot\frac{17}{86}=50$$

472

a) Gleichung (39):

$$i=\frac{z_2}{z_1}\cdot\frac{z_4}{z_3}=\frac{60}{15}\cdot\frac{80}{20}=16$$

b) Gleichung (39)

$$n_2=\frac{n_1}{i}=\frac{960\,min^{-1}}{16}=60\frac{1}{min}$$

c) Gleichung (29):

$$v_u=\pi\cdot d_2\cdot n_2$$

$$=\pi\cdot 60\frac{1}{min}300\,mm=56{,}5\frac{m}{min}=0{,}942\frac{m}{s}$$

473

a) Gleichung (29):

$$v_u=\pi\cdot d\cdot n \quad \rightarrow$$

$$n_2=\frac{v_u}{\pi\cdot d_{Rad}}=\frac{22\frac{km}{h}}{\pi\cdot 780\,mm}=2{,}5\frac{U}{s}=247\frac{U}{min}$$

b) Gleichung (29)

$$v_{uz}=\pi\cdot d_2\cdot n_2$$

$$=\pi\cdot 150\frac{U}{min}\cdot 525\,mm=247\frac{m}{min}=4{,}11\frac{m}{s}$$

Gleichung (30):

$$v_u=\omega\cdot r \quad \rightarrow \quad \omega=\frac{v_u}{r}=\frac{2\cdot v_u}{d}$$

$$\omega_2=\frac{2\cdot v_u}{d_2}=\frac{2\cdot 247\frac{m}{min}}{525\,mm}=941\frac{rad}{min}$$

$$\omega_1=\frac{2\cdot v_u}{d_1}=\frac{2\cdot 247\frac{m}{min}}{150\,mm}=3290\frac{rad}{min}$$

c) Gleichung (25):

$$\omega=2\pi_{rad}\cdot n \quad \rightarrow$$

$$n_1=\frac{\omega}{2\pi_{rad}}=\frac{3290}{2\pi}\cdot\frac{rad}{min}=523{,}7\frac{U}{min}$$

d) Gleichung (39):

$$i=\frac{n_1}{n_2}=\frac{523{,}7\,min^{-1}}{150\,min^{-1}}=3{,}49$$

474 Notwendige Anzahl der Spindelumdrehungen

$$u_2=\frac{350\,mm}{9\,mm}$$

Gleichung (39) (u = Umdrehungen):

$$i=\frac{u_1}{u_2}=\frac{d_2}{d_1} \quad \rightarrow$$

$$u_1=u_2\cdot\frac{d_2}{d_1}=38{,}89\cdot\frac{200\,mm}{40\,mm}=194{,}4$$

475 Gleichung (26) :

$$v=\frac{\Delta s}{\text{Umdrehung}}\cdot n \quad \rightarrow$$

$$n=\frac{V_f}{P}=\frac{420\frac{mm}{min}}{4\text{mm}}=105\frac{U}{min}$$

476 Gleichung (26) :

$$v=\frac{\Delta s}{\text{Umdrehung}}\cdot n \quad \rightarrow$$

$$v_f=f\cdot n=\frac{0{,}05\,mm}{U}\cdot 1420\frac{U}{min}=71\frac{mm}{min}$$

477

a) Gleichung (29):

$$v_u=\pi\cdot d\cdot n \quad \rightarrow$$

$$n=\frac{v_s}{\pi\cdot d}=\frac{18\frac{m}{min}}{\pi\cdot 25\,mm}=229\frac{U}{min}$$

b) Gleichung (26):

$$v=\frac{\Delta s}{\text{Umdrehung}}\cdot n \quad \rightarrow$$

$$v_f=f\cdot n=0{,}35\frac{mm}{U}\cdot 229\frac{U}{min}=80{,}2\frac{mm}{min}$$

478

a) Gleichung (29):

$$v_s = \pi \cdot d \cdot n = \pi \cdot 630 \frac{1}{min} \cdot 100\,mm = 197{,}9 \frac{m}{min}$$

b) Gleichung (26):

$$v = \frac{\Delta s}{\text{Umdrehung}} \cdot n \quad \rightarrow$$

$$v_f = f \cdot n = 0{,}8 \frac{mm}{U} \cdot 630 \frac{U}{min} = 504 \frac{mm}{min}$$

c) Gleichung (1):

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{160\,mm}{504 \frac{mm}{min}} = 0{,}317\,min = 19{,}0\,s$$

479

a) Gleichung (29):

$$v_u = \pi \cdot d \cdot n \quad \rightarrow$$

$$n = \frac{v_s}{\pi \cdot d} = \frac{40 \frac{m}{min}}{\pi \cdot 38\,mm} = 335 \frac{U}{min}$$

b) Gleichung (24) (z: Anzahl der Umdrehungen):

$$n = \frac{z}{\Delta t} \quad \rightarrow$$

$$z = n \cdot \Delta t = 335 \frac{U}{min} \cdot 7\,min = 2345\,U$$

$$f = \frac{l_{ges}}{z} = \frac{280\,mm}{2345} = 0{,}119\,mm$$

480

a) Gleichung (29):

$$v_u = \pi \cdot d \cdot n \quad \rightarrow$$

$$n = \frac{v_s}{\pi \cdot d} = \frac{55 \frac{m}{min}}{\pi \cdot 85\,mm} = 206{,}0 \frac{U}{min}$$

Gleichung (26):

$$v = \frac{\Delta s}{\text{Umdrehung}} \cdot n \quad \rightarrow$$

$$v_f = f \cdot n = 0{,}25 \frac{mm}{U} \cdot 206{,}0 \frac{U}{min} = 51{,}5 \frac{mm}{min}$$

Gleichung (1):

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v_f} = \frac{280\,mm}{51{,}5 \frac{mm}{min}} = 5{,}44\,min = 326\,s$$

<u>Mittlere Geschwindigkeit</u>

481

a) Gleichung (29):

$$v_u = \pi \cdot d \cdot n = \pi \cdot 330\,mm \cdot 500 \frac{1}{min} = 518 \frac{m}{min} = 8{,}64 \frac{m}{s}$$

b) Gleichung (32):

$$v_{mKolben} = 2 \cdot h \cdot n$$

$$= 2 \cdot 330\,mm \cdot 500 \frac{1}{min} = 330 \frac{m}{min} = 5{,}5 \frac{m}{s}$$

482

a) Gleichung (29):

$$v_u = \pi \cdot d \cdot n = \pi \cdot 95\,mm \cdot 3300 \frac{1}{min} = 985 \frac{m}{min} = 16{,}4 \frac{m}{s}$$

b) Gleichung (32):

$$v_{mKolben} = 2 \cdot h \cdot n$$

$$= 2 \cdot 95\,mm \cdot 3300 \frac{1}{min} = 627 \frac{m}{min} = 10{,}45 \frac{m}{s}$$

483 Gleichung (32)

$$v_{mKolben} = 2 \cdot h \cdot n \quad \rightarrow$$

$$h = \frac{v_{mKolben}}{2 \cdot n} = \frac{7 \frac{m}{s}}{2 \cdot 4000 \frac{1}{min}} = 52{,}5\,mm$$

484 Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse l_2 und der Kathete r:

a)

$$\sin \gamma = \frac{r}{l_2} \quad \rightarrow$$

$$\gamma = \arcsin \frac{r}{l_2} = \arcsin \frac{150\,mm}{600\,mm} = 14{,}5°$$

$$\beta = 2 \cdot (180° - 90° - \gamma) = 2 \cdot (90° - 14{,}5°) = 151{,}0°$$

$$\alpha = 360° - \beta = 360° - 151{,}0° = 209{,}0°$$

b)

$$l_h = 2 \cdot l_1 \cdot \sin \gamma = 2 \cdot l_1 \cdot \frac{r}{l_2}$$

$$= 2 \cdot 900\,mm \cdot \frac{150\,mm}{600\,mm} = 450\,mm$$

c) Aus Gleichung (24) mit z = 1 Umdrehung folgt:

$$t_{1Umdr} = \frac{1}{n} = \frac{1}{24 \frac{1}{min}} = \frac{1}{24} min = 2{,}5\,s$$

Zeit für den Arbeitshub:

$$t_{Arbeitshub} = \frac{\alpha}{360°} \cdot t_{1Umdr} = \frac{209°}{360°} \cdot 2{,}5\,s = 1{,}45\,s$$

Mittlere Geschwindigkeit, Gleichung (1)

$$v_{mArbeit} = \frac{l_h}{\Delta t_{Arbeitshub}} = \frac{450\,mm}{1{,}45\,s} = 0{,}310 \frac{m}{s} = 18{,}6 \frac{m}{min}$$

d) Zeit für den Rückhub:

$$t_{Rückhub} = \frac{\beta}{360°} \cdot t_{1Umdr} = \frac{151°}{360°} \cdot 2{,}5\,s = 1{,}05\,s$$

Mittlere Geschwindigkeit, Gleichung (1)

$$v_{mRück} = \frac{l_h}{\Delta t_{Rückhub}} = \frac{450\,mm}{1{,}05\,s} = 0{,}429 \frac{m}{s} = 25{,}7 \frac{m}{min}$$

485 Analog zu Aufgabe 484:

a) Kurbelradius r

$$l_h = 2 \cdot l_1 \cdot \frac{r}{l_2} \rightarrow$$

$$r = \frac{l_h \cdot l_2}{2 \cdot l_1} = \frac{300\,mm \cdot 600\,mm}{2 \cdot 900\,mm} = 100\,mm$$

b) Der neue Winkel α

$$\sin\gamma = \frac{r}{l_2} \quad \rightarrow$$

$$\gamma = \arcsin\frac{r}{l_2} = \arcsin\frac{100\,mm}{600\,mm} = 6{,}59°$$

$$\beta = 2 \cdot (180° - 90° - \gamma) = 2 \cdot (90° - 6{,}59°) = 160{,}8°$$

$$\alpha = 360° - \beta = 360° - 160{,}8° = 199{,}2°$$

Drehzahl n der Kurbel

$$v_m = \frac{l_h}{t_{Arbeit}} = \frac{l_h}{\frac{\alpha}{360°} \cdot t_{1Umdr}} \quad \rightarrow$$

$$n = \frac{v_m \cdot \alpha}{l_h \cdot 360°} = \frac{20\frac{m}{min} \cdot 199{,}2°}{300\,mm \cdot 360°} = 36{,}9\frac{m}{min} = 0{,}615\frac{m}{s}$$

Gleichmäßig beschleunigte Drehbewegung

486

a) Gleichung (18) bzw. (37):

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = 2\pi_{rad} \cdot \frac{\Delta n}{\Delta t} = 2\pi_{rad} \cdot \frac{n_1 - n_0}{\Delta t}$$

$$= 2\pi_{rad} \cdot \frac{1200\frac{1}{min} - 0}{5\,s} = 25{,}1\frac{rad}{s}$$

b) Gleichung (38):

$$a = \alpha \cdot \frac{d}{2} = 25{,}1\frac{rad}{s} \cdot \frac{200\,mm}{2} = 2{,}51\frac{m}{s^2}$$

c) Gleichungen (25)

$$\omega_1 = 2\pi_{rad} \cdot n_1 = 2\pi_{rad} \cdot 1200\frac{1}{min} = 125{,}7\frac{rad}{s}$$

mit Gleichung (17)

$$\Delta\varphi = \frac{\omega_1 + \cancel{\omega_0}}{2} \cdot \Delta t = \frac{1}{2} \cdot \omega_1 \cdot \Delta t$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 125{,}7\frac{rad}{s} \cdot 5\mathrm{s} = 314\,rad\,(50\,Umdrehungen)$$

487

a) Gleichung (18)

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_1 - \cancel{\omega_0}}{\Delta t} \quad \rightarrow$$

$$\omega_1 = \alpha \cdot \Delta t = 2{,}3\frac{rad}{s} \cdot 15\,s = 34{,}5\frac{rad}{s}$$

Gleichung (25)

$$\omega = 2\pi_{rad} \cdot n \quad \rightarrow$$

$$n_1 = \frac{\omega_1}{2\pi_{rad}} = \frac{34{,}5\frac{rad}{s}}{2\pi_{rad}} = 5{,}49\frac{1}{s} = 329\frac{1}{min}$$

b) Gleichung (19)

$$\Delta\varphi = \frac{\omega_2^2 - \cancel{\omega_0^2}}{2 \cdot \alpha} \quad \rightarrow$$

$$\omega_2 = \pm\sqrt{2 \cdot \Delta\varphi \cdot \alpha} = \pm\sqrt{2 \cdot 10 \cdot 2\pi_{rad} \cdot 2{,}3\frac{rad}{s^2}}$$

$$= +17\frac{rad}{s}$$

$$n_2 = 2{,}7\frac{U}{s} = 162\frac{U}{min}$$

488

a) Gleichung (25)

$$\omega = 2\pi_{rad} \cdot n = 2\pi_{rad} \cdot 3000\frac{1}{min} = 314\frac{rad}{s}$$

b) Gleichung (18)

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\Delta t} \quad \rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\alpha} = \frac{314\frac{rad}{s} - 0}{11{,}2\frac{rad}{s^2}} = 28\,s$$

489

a) Gleichung (25)

$$\omega_{II0} = 2\pi_{rad} \cdot n_{II0} = 2\pi_{rad} \cdot 573\frac{1}{min} = 60\frac{rad}{s}$$

$$\omega_{II1} = 2\pi_{rad} \cdot n_{II1} = 2\pi_{rad} \cdot 860\frac{1}{min} = 90\frac{rad}{s}$$

Gleichung (18)

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\Delta t} \quad \rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{\omega_{II1} - \omega_{II0}}{\alpha} = \frac{90\frac{rad}{s} - 60\frac{rad}{s}}{15\frac{rad}{s^2}} = 2\,s$$

b) Gleichung (17):

$$\frac{\omega_1 + \omega_0}{2} = \omega_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \rightarrow$$

$$\Delta\varphi_I = \omega_I \cdot \Delta t = 90\frac{rad}{s} \cdot 2\mathrm{s}$$

$$= 180\,rad\,(28{,}6\,Umdrehungen)$$

c) Gleichung (17):

$$\Delta\varphi_{II} = \frac{\omega_{II1} + \omega_{II0}}{2} \cdot \Delta t = \frac{90\frac{rad}{s} + 60\frac{rad}{s}}{2} \cdot 2\mathrm{s}$$

$$= 150\,rad\,(23{,}9\,Umdrehungen)$$

d)

$$\Delta\varphi_{I,II} = \varphi_I - \varphi_{II} = 180\,rad - 150\,rad$$

$$= 30\,rad\,(4{,}77\,Umdrehungen)$$

Quelle der Aufgaben: Alfred Böge / Walter Schlemmer: Aufgabensammlung Technische Mechanik, Vieweg+Teubner, Ausgaben ziemlich identisch seit mind. 1999

490

a) Einzelabschnitte mithilfe Gleichung (17):

$$\frac{\omega_1+\omega_0}{2}=\omega_m=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\quad\rightarrow$$

$$\Delta\varphi_{01}=\frac{\omega_1+\cancel{\omega_0}}{2}\cdot\Delta t_{01}=\frac{1}{2}\cdot\omega_1\cdot\Delta t_{01}$$

$$\Delta\varphi_{12}=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\cdot\Delta t_{12}=\omega_1\cdot\Delta t_{12}$$

$$\Delta\varphi_{23}=\frac{\omega_2+\cancel{\omega_3}}{2}\cdot\Delta t_{23}=\frac{1}{2}\cdot\omega_1\cdot\Delta t_{23}$$

mit

$$\Delta\varphi_{03}=2\pi_{rad}\cdot\frac{180°}{360°}=\pi_{rad}$$

ergeben zusammen:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_{03}&=\Delta\varphi_{01}+\Delta\varphi_{12}+\Delta\varphi_{23}\\&=\frac{1}{2}\cdot\omega_1\Delta t_{01}+\omega_1\cdot\Delta t_{12}+\frac{1}{2}\cdot\omega_1\Delta t_{23}\\&=\omega_1\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\Delta t_{01}+\Delta t_{12}+\frac{1}{2}\cdot\Delta t_{23}\right)\quad\rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_1&=\frac{\Delta\varphi_{03}}{\frac{1}{2}\cdot\Delta t_{01}+\Delta t_{12}+\frac{1}{2}\cdot\Delta t_{23}}\\&=\frac{\pi_{rad}}{\frac{1}{2}\cdot 4\mathrm{s}+35\,s+\frac{1}{2}\cdot 3\mathrm{s}}=0{,}0816\,\frac{rad}{s}\end{aligned}$$

b) Gleichung (18)

$$\begin{aligned}\alpha_{01}&=\frac{\Delta\omega_{10}}{\Delta t_{01}}=\frac{\omega_1-\cancel{\omega_0}}{\Delta t_{01}}=\frac{0{,}0816\,\frac{rad}{s}-0}{4\mathrm{s}}\\&=0{,}0204\,\frac{rad}{s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{23}&=\frac{\Delta\omega_{23}}{\Delta t_{23}}=\frac{\cancel{\omega_3}-\omega_2}{\Delta t_{23}}=\frac{0-0{,}0816\,\frac{rad}{s}}{3\mathrm{s}}\\&=-0{,}0272\,\frac{rad}{s}\end{aligned}$$

491

a) Gleichung (30):

$$\omega=\frac{v_U}{r}=\frac{2\cdot v_u}{d}=\frac{2\cdot 15\,\frac{m}{s}}{5\mathrm{m}}=6\,\frac{rad}{s}$$

b) Drehwinkel aus Gleichung (22):

$$\varphi_{01}=2\pi_{rad}\cdot z_{01}=2\pi_{rad}\cdot 10=62{,}8\,rad$$

Zeit aus Gleichung (17):

$$\frac{\omega_1+\omega_0}{2}=\omega_m=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\quad\rightarrow$$

$$\Delta t_{01}=\frac{2\cdot\Delta\varphi_{01}}{\omega_1+\cancel{\omega_0}}=\frac{2\cdot 62{,}8\,rad}{6\,\frac{rad}{s}+0}=20{,}9\,s$$

Winkelbeschleunigung aus Gleichung (18)

$$\alpha=\frac{\Delta\omega}{\Delta t_{01}}=\frac{\omega_1-\cancel{\omega_0}}{\Delta t_{01}}=\frac{6\,\frac{rad}{s}-0}{20{,}9\,s}=0{,}286\,\frac{rad}{s^2}$$

c) Drehwinkel aus Gleichung (22):

$$\varphi_{23}=2\pi_{rad}\cdot z_{23}=2\pi_{rad}\cdot 7=43{,}98\,rad$$

Zeit aus Gleichung (17):

$$\frac{\omega_1+\omega_0}{2}=\omega_m=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\quad\rightarrow$$

$$\Delta t_{23}=\frac{2\cdot\Delta\varphi_{23}}{\cancel{\omega_3}+\omega_2}=\frac{2\cdot 43{,}98\,rad}{0+6\,\frac{rad}{s}}=14{,}66\,s$$

Winkelbeschleunigung aus Gleichung (18)

$$\alpha=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\cancel{\omega_3}-\omega_2}{\Delta t_{23}}=\frac{0-6\,\frac{rad}{s}}{14{,}66\,s}=-0{,}409\,\frac{rad}{s^2}$$

d) Drehwinkel im mittleren Abschnitt aus Gleichung (17):

$$\omega_m=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\quad\rightarrow$$

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_{12}&=\omega_{12}\cdot\Delta t_{12}=\omega_{12}\cdot\Delta t_{ges}-\Delta t_{01}-\Delta t_{23}\\&=6\,\frac{rad}{s}\cdot 45\mathrm{s}-20{,}9\,s-14{,}66\,s=56{,}54\,rad\end{aligned}$$

Drehwinkel aller Abschnitte zusammen:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_{03}&=\Delta\varphi_{01}+\Delta\varphi_{12}+\Delta\varphi_{23}\\&=10\cdot 2\pi_{rad}+56{,}64\,rad+7\cdot 2\pi_{rad}\\&=163{,}4\,rad\,(26\,Umdrehungen)\end{aligned}$$

e) Förderhöhe h aus Gleichung (36)

$$\varphi=\frac{s_U}{r}\quad\rightarrow$$

$$h=r\cdot\varphi_{03}=\frac{d}{2}\cdot\varphi_{03}=\frac{5\,m}{2}\cdot 163{,}4\,rad=408{,}6\,m$$

492

a) Gleichung (38):

$$\alpha=\frac{a}{r}=\frac{2\cdot a}{d}=\frac{2\cdot 1\,\frac{m}{s^2}}{800\,mm}=2{,}5\,\frac{rad}{s}$$

b) Gleichung (18)

$$\alpha=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\omega_1-\cancel{\omega_0}}{\Delta t}\quad\rightarrow$$

$$\omega_1=\alpha\cdot\Delta t_{01}=2{,}5\,\frac{rad}{s^2}\cdot 10\mathrm{s}=25\,\frac{rad}{s}$$

c) Gleichung (30):

$$v_u=\omega_1\cdot r=25\,\frac{rad}{s}\cdot\frac{800\,mm}{2}=10\,\frac{m}{s}$$

493

a) Gleichung (30):

$$\omega_1 = \frac{v_1}{r} = \frac{70\,\frac{km}{h}}{300\,mm} = 64{,}8\,\frac{rad}{s}$$

b) Gleichung (22)

$$\varphi = 2\pi_{rad} \cdot z = 2\pi_{rad} \cdot 65 = 408\,rad$$

c) Gleichung (19)

$$\Delta\varphi = \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{2 \cdot \alpha} \quad \rightarrow$$

$$\alpha = \frac{\omega_1^2}{2 \cdot \Delta\varphi} = \frac{\left(64{,}8\,\frac{rad}{s}\right)^2}{2 \cdot 408\,rad} = 5{,}14\,\frac{rad}{s^2}$$

d) Gleichung (18)

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\Delta t} \quad \rightarrow$$

$$\Delta t_{01} = \frac{2 \cdot \Delta\, varphi}{\omega_1 + \cancel{omega_0}} = \frac{2 \cdot 408\,rad}{64{,}8\,\frac{rad}{s} + 0}$$

II Formeln für lineare Bewegungen 2

Grundgleichungen

Alle Bewegungsgleichungen bei konstanter Beschleunigung basieren auf 2 Grundgleichungen. Wer diese kennt und umformen kann, benötigt die anderen Gleichungen nicht .

$$\boxed{v_m=\frac{\Delta s}{\Delta t}} \qquad (1)$$

$$\boxed{a=\frac{\Delta v}{\Delta t}} \qquad (2)$$

mit den folgenden Größen:

Δs	Weg (-änderung)	$\Delta s=s_1-s_0$
Δt	Zeit (-änderung)	$\Delta t=t_1-t_0$
a	Beschleunigung	
Δv	Geschwindigkeit (s-änderung)	$\Delta v=v_1-v_0$
v_m	mittlere Geschwindigkeit	$v_m=\frac{v_1+v_0}{2}$

Die Indizes 0 und 1 bezeichnen die Größen zu Beginn und am Ende einer Bewegung. Zum Lösen von Aufgaben können sie sinngemäß angepasst werden.

Hergeleitete Gleichungen

Ohne Beschleunigung a

Ist eine Grundformel (s.o.)

$$\frac{v_1+v_0}{2}=v_m=\frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (1)$$

Ohne Weg s

Ist eine Grundformel (s.o.)

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_1-v_0}{\Delta t} \qquad (2)$$

Ohne Zeit t

Gleichung (1) und (2) nach Δt auflösen und gleichsetzen:

$$\Delta s=\frac{v_1^2-v_0^2}{2\cdot a} \qquad (3)$$

Ohne Anfangsgeschwindigkeit v_0

Gleichung (1) und (2) nach v_0 auflösen und gleichsetzen:

$$\Delta s=-\frac{1}{2}\cdot a\cdot\Delta t^2+v_1\cdot\Delta t \qquad (4)$$

Ohne Endgeschwindigkeit v_1

Gleichung (1) und (2) nach v_1 auflösen und gleichsetzen:

$$\Delta s=+\frac{1}{2}\cdot a\cdot\Delta t^2+v_0\cdot\Delta t \qquad (5)$$

Tabelle aller Varianten

Tabelle I auf Seite 31 enthält alle Formeln nach allen möglichen gesuchten Größen umgestellt.

Sonderfälle

Gleichförmig geradlinige Bewegungen

Gleichförmige Bewegungen sind ein Sonderfall der Bewegung mit konstanter Beschleunigung.

Der Sonderfall ist

$$a=0 \text{ bzw. } \Delta v=0 \text{ bzw. } v=konst. \qquad (6)$$

Freier Fall

Der freie Fall beginnt mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 = 0. Alle Formeln gelten auch für die senkrechte Komponente des waagerechten Wurfs und sinngemäß für Würfe nach oben bis zum höchsten Punkt (v_1 = 0).

Zusammenhang zwischen Fallhöhe h und Fallzeit T (Steighöhe h und Steigzeit T)

Aus Gleichung (5) mit v_0 = 0 (Δs = h, Δt = T, a = g):

$$h=\frac{1}{2}g\cdot T^2 \qquad (7)$$

Zusammenhang zwischen Endgeschwindigkeit v und Fallzeit T (Anfangsgeschwindigkeit v und Steigzeit T)

Aus Gleichung (41 mit v_0 = 0 (Δt = T, a = g):

$$v=g\cdot T \qquad (8)$$

Zusammenhang zwischen Endgeschwindigkeit v und Fallhöhe h (Anfangsgeschw. v und Steighöhe h).

Gleichung (9 erhält man, indem man Gleichung (7) in Gleichung (8) einsetzt oder aus Gleichung (3) mit v_0 = 0 (Δs = h, a = g):

$$v=\sqrt{2\cdot g\cdot h} \qquad (9)$$

Zusammengesetzte Bewegungen

Bewegungen in verschiedenen Richtungen sind wie Kräfte völlig unabhängig, wenn zwischen ihnen ein rechter Winkel liegt. Deshalb zerlegt man krummlinige Bewegungen üblicherweise in x- und y-Richtung, z.B. waagerecht und senkrecht, und betrachtet die Komponenten getrennt. Für jede Richtung gelten die obigen Bewegungsgesetze. Den Zusammenhang zwischen den Bewegungen stellt man über die Zeit t her.

Die Gesamtgeschwindigkeit v

ergibt sich aus den waagerechten und senkrechten Geschwindigkeiten v_x und v_y durch Anwendung des Satzes von Pythagoras:

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2} \qquad (10)$$

Die Richtung α der Gesamtgeschwindigkeit v

aus den Einzelkomponenten v_x und v_y ermittelt man mit dem Arcustangens. Das ist die Umkehrfunktion des Tangens und wird bei den üblichen Taschenrechnern mit der Taste $\boxed{\tan^{-1}}$ berechnet.

$$\tan\alpha=\frac{v_y}{v_x} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha=\arctan\frac{v_y}{v_x} \qquad (11)$$

Die Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_y

erhält man aus der Gesamtgeschwindigkeit v mittels Winkelfunktionen

$$v_x=v\cdot\cos\alpha$$

$$v_y=v\cdot\sin\alpha \qquad (12)$$

Waagerechter Wurf

Der waagerechte Wurf beginnt mit der senkrechten Geschwindigkeit $v_{y0} = 0$, deshalb gelten für die senkrechten Komponenten des Wurfes die Gesetze des freien Falls (siehe Gleichungen 7ff).

Zusammenhang zwischen Wurfhöhe h, Wurfweite s_x und Wurfgeschwindigkeit v_x:

Für die waagerechte Komponenten des Wurfes nehme man die Gleichung (5) mit $\Delta s = h$ und der konstanten Geschwindigkeit $v_m = v_x$ (Gleichung (6)) und setzt sie in Gleichung (7) ein. Dies ist möglich, da die Zeit T für waagerechte und senkrechte Bewegungen gleich tickt (Beispiel Aufgabe 444).

$$h=\frac{1}{2}\cdot g\cdot\left(\frac{s_x}{v_x}\right)^2 \qquad (13)$$

Schräger Wurf

Zusammenhang zwischen Wurfweite s_x, Abwurfgeschwindigkeit v_0 und Abwurfwinkel α, wenn Start- und Zielpunkt auf gleicher Höhe liegen.

Herleitung siehe Aufgabe 448.

$$s_x=\frac{v_0^2\cdot\sin 2\alpha}{g} \qquad (14)$$

Zusammenhang zwischen Wurfdauer t, Abwurfgeschwindigkeit v_0 und Abwurfwinkel α, wenn Start- und Zielpunkt auf gleicher Höhe liegen.

Herleitung ?

$$t=\frac{2\cdot v_0\cdot\sin\alpha}{g} \qquad (15)$$

Zusammenhang zwischen Wurfweite s_x, Abwurfgeschwindigkeit v_0, Abwurfwinkel α und dem Höhenunterschied Δs_y zwischen Start- und Zielpunkt.

Herleitung ?

$$s_x=v_x\cdot\left[-\frac{v_{y0}}{g}\pm\sqrt{\left(\frac{v_{y0}}{g}\right)^2+\frac{2\cdot\Delta s_y}{g}}\right] \qquad (16)$$

Wenn Anfangsgeschwindigkeit vy0 und Höhenunterschied Δs_y nach oben positiv gewählt werden, wird die Erdbeschleunigung g negativ.

III Formeln für Drehbewegung

Winkelgeschwindigkeit

Entsprechend der Gleichungen für lineare Bewegung

(1) $v_m=\frac{\Delta s}{\Delta t}$ (2) $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$

gilt für Winkelgeschwindigkeiten:

(17) $\boxed{\omega_m=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}}$ (18) $\boxed{\alpha=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}}$

mit den folgenden Größen:

Δφ	Winkel (-änderung)	$\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_0$
Δt	Zeit (-änderung)	$\Delta t=t_1-t_0$
α	Winkelbeschleunigung	
Δω	Winkelgeschw.(s-änderung)	$\Delta\omega=\omega_1-\omega_0$
ω_m	mittlere Winkelgeschwindigkeit	$\omega_m=\frac{\omega_1+\omega_0}{2}$

Die Indizes 0 und 1 bezeichnen die Größen zu Beginn und am Ende einer Bewegung. Zum Lösen von Aufgaben können sie sinngemäß angepasst werden.

Hergeleitete Gleichungen

Wie bei den Geschwindigkeiten für lineare Bewegung lassen sich aus den Grundgleichungen für die Winkelgeschwindigkeiten weitere Formen herleiten.

Ohne Winkelbeschleunigung α (alpha)

Ist eine Grundformel (s.o.)

$$\frac{\omega_1+\omega_0}{2}=\omega_m=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \qquad (17)$$

Ohne Winkel φ (phi)

Ist eine Grundformel (s.o.)

$$\alpha=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\omega_1-\omega_0}{\Delta t} \qquad (18)$$

Ohne Zeit t

Gleichungen (17) und (18) nach Δt auflösen und gleichsetzen:

$$\Delta\varphi=\frac{\omega_1^2-\omega_0^2}{2\cdot\alpha} \qquad (19)$$

Ohne Anfangswinkelgeschwindigkeit ω_0 (omega)

Gleichungen (17) und (18) nach ω_0 auflösen und gleichsetzen:

$$\Delta\varphi=-\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\Delta t^2+\omega_1\cdot\Delta t \qquad (20)$$

Ohne Endwinkelgeschwindigkeit ω_1

Gleichungen (17) und (18) nach ω_1 auflösen und gleichsetzen:

$$\Delta\varphi=+\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\Delta t^2+\omega_0\cdot\Delta t \qquad (21)$$

Winkelgeschwindigkeit und Drehzahl

Winkel φ sind Teile von Umdrehungen. Eine vollständige Umdrehung hat den Wert 360° oder $2\pi_{rad}$.

Also kann man einen Winkel auch mit der Anzahl z der Umdrehungen beschreiben:

$$\varphi = 2\pi_{rad} \cdot z \quad (22)$$

Eingesetzt in Gleichung (17) wird die Winkelgeschwindigkeit ω:

$$\omega = \frac{2\pi_{rad} \cdot \Delta z}{\Delta t} = 2\pi_{rad} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta t} \quad (23)$$

Die Anzahl z der Umdrehungen pro Zeit t kennen wir auch als Drehzahl n

$$n = \frac{z}{\Delta t} \quad (24)$$

Eingesetzt in (23) ergibt dies den Zusammenhang:

$$\omega = 2\pi_{rad} \cdot n \quad (25)$$

Winkelgeschwindigkeit ω und Drehzahl n sind also zwei verschiedene Möglichkeiten, die Geschwindigkeit einer Drehbewegung zu beschreiben.
"rad" ist eine Einheit wie "Umdrehung". Mathematisch stehen sie für 1, geben uns aber einen Hinweis, wie eine Zahl zu lesen ist.

Zusammenhänge zwischen geradliniger und drehender Bewegung

Drehzahl n

Für Geschwindigkeiten gilt die Grundgleichung

(1) $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

Bei Drehbewegungen weiß man oft, welchen Weg s_{1Umdr} das Objekt während einer Umdrehung zurücklegt. Mit der Anzahl z der Umdrehungen in (1) ergibt das:

$$v = \frac{s_{1Umdr} \cdot \Delta z}{\Delta t} = s_{1Umdr} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta t} \quad (26)$$

Die Anzahl z der Umdrehungen pro Zeit t kennen wir als Drehzahl n:

$$n = \frac{\Delta z}{\Delta t} \quad (27)$$

(27) eingesetzt in (26) ergibt:

$$v = s_{1Umdr} \cdot n \quad (28)$$

Anwendungsbeispiele:

Umfangsgeschwindigkeit v_u ($s_{1Umdr} = \pi \cdot d$ = Umfang)

$$v_u = \pi \cdot d \cdot n \quad (29)$$

$$v_u = \omega \cdot r = \omega \cdot \frac{d}{2} \quad (30)$$

Vorschubgeschwindigkeit v_f ($s_{1Umdr} = f$ = Vorschub)

$$v_f = f \cdot n \quad (31)$$

Mittlere Geschwindigkeit eines Kolbens $v_{mKolben}$
($s_{1Umdr} = 2h$ = Doppelter Hub bzw. Kurbelkreis∅)

$$v_{mKolben} = 2 \cdot h \cdot n = 2 \cdot d \cdot n \quad (32)$$

Axiale Geschwindigkeit einer Schraube v_{Schr}
($s_{1Umdr} = P$ = Steigung)

$$v_{Schraube} = P \cdot n \quad (33)$$

Übersicht

Im Prinzip kann man jede Drehung mit Winkel_{rad}, Anzahl der Umdrehungen oder Umfangsweg beschreiben. Es gelten die Zusammenhänge (r: Radius):

$$1\,Umdrehung = 2\pi_{rad} \quad (34)$$

$$1\,Umfang = 2\pi \cdot r \quad (35)$$

Dies kann auch auf die Ableitungen dieser Größen übertragen werden:

φ	Winkel
ω	Winkelgeschwindigkeit
α	Winkelbeschleunigung
z	Anzahl der Umdrehungen
n	Drehzahl
$\dot{n}$	Drehbeschleunigung
s_U	Am Umfang zurückgelegter Weg
v_U	Umfangsgeschwindigkeit
a	(Weg-)Beschleunigung

	Umdrehung	Umfang
Weg	$\varphi = 2\pi_{rad} \cdot z$ (22)	$\varphi = \frac{s_U}{r}$ (36)
Geschwindigkeit	$\omega = 2\pi_{rad} \cdot n$ (25)	$\omega = \frac{v_U}{r}$ (30)
Beschleunigung	$\alpha = 2\pi_{rad} \cdot \dot{n}$ (37)	$\alpha = \frac{a}{r}$ (38)

Übersetzung

Die Indizes 1, 2,.. bezeichnen die Größen in der Reihenfolge des Kraftflusses vom Antrieb zum Abtrieb.

$$i = \frac{M_2}{M_1} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1} \cdot \left(\frac{d_4}{d_3} \ldots\right) = \frac{z_2}{z_1} \cdot \left(\frac{z_4}{z_3} \ldots\right) \quad (39)$$

n	Drehzahl
M	Drehmoment
d	Durchmesser
z	Zähnezahl

unsortiert

Bei schlupffrei rollenden Körpern gilt:

$$v_u = v_{Roll} \quad (40)$$

IV Sonstige Formeln

Lösung für quadratische Gleichungen

Jede quadratische Gleichung kann normiert werden auf die Form:

$$0 = x^2 + p \cdot x + q$$

und dann mit der allgemeinen Lösung für quadratische Gleichungen gelöst werden.

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad (41)$$

In der Regel gibt es 2 Lösungen. Es kann sein, dass nicht alle Lösungen technisch sinnvoll sind.

Tabelle I: Formelübersicht für lineare Bewegungen

Beispiele aus [Böge Aufg.]		3 unabhängige Größen			2 unabhängige Größen			
		a) Beschleunigung	b) Weg	c) Zeit	d) Anfangsgeschw.	e) Endgeschw.	f) Durchschnittsg.	g) G.-Differenz
	gesucht →	a	Δs	Δt	v_{vorher}	$v_{nachher}$	v_m	Δv
	unbeteiligt ↓		$\Delta s=s_1-s_0$		$v_v=v_n-\Delta v$ $v_v=2\cdot v_m-v_1$	$v_n=v_v+\Delta v$ $v_n=2\cdot v_m-v_v$	$v_m=\frac{v_n+v_v}{2}$	$\Delta v=v_n-v_v$
(1)	a	Zeile: Formeln ohne a Spalte: Formeln für a	411, 414a, 417, 428b $\Delta s=\Delta t\cdot v_m$ $=\Delta t\cdot\frac{v_n+v_v}{2}$	409b $\Delta t=\frac{\Delta s}{v_m}=\frac{2\cdot\Delta s}{v_n+v_v}$	$v_v=2\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}-v_n$	$v_n=2\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}-v_v$	Grundgleichung 1 $v_m=\frac{\Delta s}{\Delta t}$	
(2)	Δs	419 Grundgleichung 2 $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$	Zeile: Formeln ohne Δs Spalte: Formeln für Δs	422, 425, 428a $\Delta t=\frac{\Delta v}{a}=\frac{v_n-v_v}{a}$	420a $v_v=v_n-a\cdot\Delta t$	$v_n=v_v+a\cdot\Delta t$		420a $\Delta v=a\cdot\Delta t$
(3)	Δt	423 $a=\frac{v_n^2-v_v^2}{2\Delta s}$	423, 425b $\Delta s=\frac{v_n^2-v_v^2}{2a}$	Zeile: Formeln ohne Δt Spalte: Formeln für Δt	421 $v_v=\pm\sqrt{v_n^2-2a\cdot\Delta s}$	427a $v_n=\pm\sqrt{v_v^2+2a\cdot\Delta s}$		
(4)	v_0	$a=+2\cdot\frac{v_n}{\Delta t}-2\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t^2}$	420b $\Delta s=v_n\cdot\Delta t-\frac{1}{2}a\cdot\Delta t^2$	$\Delta t_{a,b}=+\frac{v_n}{a}\pm\sqrt{\left(\frac{v_n}{a}\right)^2-\frac{2\Delta s}{a}}$	Zeile: Formeln ohne v_0 Spalte: Formeln für v_0	431a $v_n=\frac{\Delta s}{\Delta t}+\frac{1}{2}a\cdot\Delta t$	geht nicht ohne v_0	geht nicht ohne v_0
(5)	v_1	424b $a=2\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t^2}-2\cdot\frac{v_v}{\Delta t}$	426c $\Delta s=v_v\cdot\Delta t+\frac{1}{2}a\cdot\Delta t^2$	426c, 427b $\Delta t_{a,b}=-\frac{v_v}{a}\pm\sqrt{\left(\frac{v_v}{a}\right)^2+\frac{2\Delta s}{a}}$	431b $v_v=\frac{\Delta s}{\Delta t}-\frac{1}{2}a\cdot\Delta t$	Zeile: Formeln ohne v_1 Spalte: Formeln für v_1	geht nicht ohne v_1	geht nicht ohne v_1