



# 1 Parameter von normalverteilten Messreihen bestimmen

Berechnen Sie für die folgenden Messreihen

a) Mittelwert  $\bar{x}$

b) Standardabweichung  $s$

Lagerbuchse, gefordert sind 6- $\sigma$  für  $\varnothing 33H8$

1.1 Maschinenfähigkeitsuntersuchung  $n = 50$

33,02	33,01	33,02	33,02	33,02
33,02	33,02	33,02	33,02	33,02
33,02	33,02	33,02	33,01	33,03
33,02	33,02	33,03	33,02	33,02
33,02	33,02	33,02	33,02	33,03
33,02	33,02	33,03	33,03	33,02
33,02	33,02	33,02	33,02	33,01
33,02	33,02	33,02	33,03	33,02
33,02	33,02	33,02	33,02	33,02
33,02	33,02	33,01	33,02	33,02

1.2 Prozessfähigkeitsuntersuchung  $n = 125$

33,01	33,02	33,02	33,02	33,02
33,02	33,02	33,02	33,02	33,01
33,03	33,02	33,02	33,02	33,02
33,02	33,02	33,02	33,02	33,02
33,02	33,02	33,02	33,02	33,04
33,02	33,02	33,01	33,02	33,02
33,02	33,02	33,02	33,01	33,02
33,02	33,02	33,03	33,02	33,03
33,02	33,01	33,02	33,01	33,02
33,02	33,02	33,02	33,01	33,01
33,02	33,02	33,03	33,02	33,02
33,02	33,02	33,02	33,03	33,01
33,02	33,02	33,01	33,02	33,02
33,01	33,03	33,02	33,03	33,01
33,02	33,02	33,03	33,02	33,02
33,02	33,02	33,02	33,02	33,02
33,02	33,01	33,01	33,02	33,02
33,02	33,02	33,02	33,02	33,01
33,02	33,02	33,02	33,02	33,01
33,02	33,02	33,01	33,02	33,02
33,03	33,02	33,01	33,02	33,02
33,03	33,02	33,02	33,02	33,01
33,01	33,02	33,01	33,02	33,02
33,01	33,03	33,02	33,02	33,02
33,02	33,03	33,02	33,01	33,02

Zylinderstift, gefordert sind 8- $\sigma$  für  $\varnothing 4m6$

1.3 Maschinenfähigkeitsuntersuchung  $n = 50$

4,006	4,008	4,007	4,007	4,007
4,009	4,008	4,007	4,007	4,007
4,008	4,008	4,007	4,007	4,007
4,006	4,008	4,008	4,008	4,007
4,008	4,007	4,007	4,009	4,007
4,007	4,007	4,007	4,007	4,007
4,009	4,008	4,009	4,008	4,007
4,007	4,007	4,008	4,008	4,007
4,008	4,008	4,008	4,008	4,007
4,007	4,006	4,009	4,008	4,008

1.4 Prozessfähigkeitsuntersuchung  $n = 125$

4,008	4,008	4,007	4,007	4,006
4,008	4,008	4,008	4,007	4,008
4,007	4,007	4,007	4,008	4,007
4,008	4,007	4,009	4,007	4,008
4,007	4,007	4,008	4,008	4,008
4,008	4,007	4,009	4,007	4,007
4,008	4,007	4,007	4,007	4,008
4,007	4,006	4,008	4,007	4,008
4,008	4,007	4,006	4,007	4,006
4,007	4,008	4,009	4,007	4,007
4,007	4,008	4,007	4,007	4,009
4,005	4,008	4,006	4,008	4,008
4,007	4,008	4,006	4,008	4,007
4,008	4,008	4,009	4,007	4,008
4,008	4,008	4,006	4,007	4,007
4,007	4,008	4,007	4,008	4,007
4,006	4,008	4,007	4,007	4,007
4,008	4,008	4,007	4,007	4,006
4,007	4,007	4,006	4,008	4,006
4,008	4,008	4,007	4,008	4,008
4,007	4,008	4,008	4,007	4,007
4,006	4,007	4,007	4,008	4,007
4,009	4,007	4,005	4,009	4,009
4,007	4,006	4,006	4,007	4,007
4,008	4,008	4,008	4,007	4,008

## Lösungen

1.1  $c_m$  (Lagerbuchse):

a)  $\bar{x} = 33,02040$  mm

= MITTELWERT(Messwerte)

b)  $s = 4,499$   $\mu$ m

= STABW(Messwerte)

1.2  $c_p$  (Lagerbuchse):

a)  $\bar{x} = 33,01928$  mm;

b)  $s = 5,561$   $\mu$ m

1.3  $c_m$  (Zylinderstift):

a)  $\bar{x} = 4,00750$  mm

b)  $s = 0,7626$   $\mu$ m

1.4  $c_p$  (Zylinderstift):

a)  $\bar{x} = 4,00736$  mm;

b)  $s = 0,827$   $\mu$ m



## 2 Unter- und Überschreitungsanteile für gegebene Grenzwert

Ein (Grenz-)Unterschreitungsanteil ist der Anteil  $p$  einer Verteilung, der unter einem bestimmten Grenzwert  $G$  liegt<sup>1</sup>, während ein (Grenz-)Überschreitungsanteil über einem Grenzwert  $G$  liegt. Typisches Beispiel sind Ausschussanteile, also die Anteile einer Fertigung, die unterhalb oder oberhalb der Toleranzgrenzen liegen.

### 2.1 Leuchtstoffröhren

Die Brenndauer von Leuchtstoffröhren ist normalverteilt, die

$$\mu = 900 \text{ h}$$

Parameter stehen rechts:

$$\sigma = 100 \text{ h}$$

Bestimmen Sie die Anteile für Lampen, die

- weniger als 650h brennen
- länger als 1200h brennen
- zwischen 750 und 1100h lang brennen
- weniger als 800h oder länger als 1200h brennen

### 2.2 Fettanteil

Eine Stichprobe der Bevölkerung wurde nach gesundheitlichen Gesichtspunkten untersucht. Für die Gruppe der 30..39jährigen ist der Anteil des Fettes an der Körpermasse rechts angegeben.

$$\mu = 25,1 \%$$

$$\sigma = 5,9 \%$$

Wie groß ist der Anteil Personen dieser Gruppe

- mit weniger als 18,5% Fettanteil?
- mit mehr als 30% Fettanteil?
- zwischen 24 und 27% Fettanteil?
- mit weniger als 15% oder mehr als 40% Fettanteil?

### 2.3 Distanzscheiben

Die Dicke von Distanzplättchen ist normalverteilt, Werte siehe rechts. Ein Kunde fragt an, ob Unterlagscheiben innerhalb der folgenden Toleranz geliefert werden können:

Werte der Fertigung:

$$\mu = 3,25 \text{ mm}$$

$$\sigma = 0,15 \text{ mm}$$

- Wie viel Prozent seiner Fertigung muss er aussortieren, wenn er diesen Kunden beliefern möchte?

Forderung:

### 2.4 Ausschuss- und Gutanteile

$$x_{\text{unten}} = 3,00 \text{ mm}$$

$$x_{\text{oben}} = 3,60 \text{ mm}$$

- Wie groß ist der Ausschussanteil einer 6- $\sigma$ -Fertigung?
- Wie groß ist der Ausschussanteil einer 8- $\sigma$ -Fertigung?
- Welcher Anteil einer Normalverteilung liegt im Bereich Mittelwert  $\pm 1$  Standardabweichung?

Lösungen: (Erklärungen siehe Arbeitsblatt ....) in der Schreibweise von Tabellenkalkulationen:

Tabellenkalkulationen berechnen direkt nur den Unterschreitungsanteil (Stand 2009), die anderen Anteile müssen daraus abgeleitet werden:

#### 2.1 Leuchtstoffröhren

- Unterschreitungsanteil  $p(x < 650\text{h}) = 0,62097\% = \text{NORMVERT}(x; \mu; \sigma; \text{WAHR}) = \text{NORMVERT}(650\text{h}; 900\text{h}; 100\text{h}; 1)$
- Überschreitungsanteil  $p(1200\text{h} < x) = 0,13499\% = 1 - \text{NORMVERT}(x; \mu; \sigma; \text{WAHR}) = 1 - \text{NORMVERT}(1200\text{h}; 900\text{h}; 100\text{h}; 1)$
- Zwischenanteil  $p(750\text{h} < x < 1100\text{h}) = 91,044\% = 99,8650\% - 6,6807\% = \text{NORMVERT}(1100\text{h}; 900\text{h}; 100\text{h}; 1) - \text{NORMVERT}(750\text{h}; 900\text{h}; 100\text{h}; 1)$
- Ausschussanteil  $p(x < 800\text{h} \cup 1200\text{h} < x) = 16,0\% = 15,866\% + 0,13499\% = \text{NORMVERT}(800\text{h}; 900\text{h}; 100\text{h}; 1) + 1 - \text{NORMVERT}(1200\text{h}; 900\text{h}; 100\text{h}; 1)$

#### 2.2 Fettanteil

- Unterschreitungsanteil  $p(x < 18,5\%) = \text{NORMVERT}(G_U; \mu; \sigma; \text{WAHR}) = \text{NORMVERT}(18,5\%; 25,1\%; 5,9\%; \text{WAHR}) = 13,16\%$
- Überschreitungsanteil  $p(30\% < x) = 1 - \text{NORMVERT}(G_O; \mu; \sigma; \text{WAHR}) = 1 - \text{NORMVERT}(30\%; 25,1\%; 5,9\%; \text{WAHR}) = 20,313\%$
- Zwischenanteil  $p(24\% < x < 27\%) = 62,629\% - 42,605\% = \text{NORMVERT}(G_O; \mu; \sigma; \text{WAHR}) - \text{NORMVERT}(G_U; \mu; \sigma; \text{WAHR}) = \text{NORMVERT}(27\%; 25,1\%; 5,9\%; \text{WAHR}) - \text{NORMVERT}(24\%; 25,1\%; 5,9\%; \text{WAHR}) = 20,024\%$
- Ausschlussanteil  $p(x < 15\% \cup 40\% < x) = 4,346\% + 0,578\% = \text{NORMVERT}(G_U; \mu; \sigma; \text{WAHR}) + 1 - \text{NORMVERT}(G_O; \mu; \sigma; \text{WAHR}) = \text{NORMVERT}(15\%; 25,1\%; 5,9\%; \text{WAHR}) + 1 - \text{NORMVERT}(40\%; 25,1\%; 5,9\%; \text{WAHR}) = 4,924\%$

#### 2.3 Distanzscheiben

- Ausschussanteil  $p(x < 3\text{mm} \cup 3,6\text{mm} < x) = \text{NORMVERT}(G_U; \mu; \sigma; \text{WAHR}) + 1 - \text{NORMVERT}(G_O; \mu; \sigma; \text{WAHR}) = 4,7790\% + 0,9815\% = 5,8\%$

#### 2.4 Ausschuss- und Gutanteile

Bei 6- $\sigma$  müssen die Toleranzgrenzen  $G_U$  und  $G_O$  mindestens jeweils 3 Standardabweichungen  $\sigma$  nach oben und nach vom Mittelwert  $\mu$  entfernt liegen. Wenn man z.B.  $\mu=0$  und  $\sigma=1$  wählt (andere Werte sind möglich), muss die Toleranz also zwischen -3 und +3 liegen.

- Ausschussanteil  $p(x < -3 \cup +3 < x) = \text{NORMVERT}(-3; 0; 1; \text{WAHR}) + 1 - \text{NORMVERT}(+3; 0; 1; \text{WAHR}) = 0,135\% + 0,135\% = 0,270\%$
- Ausschussanteil  $p(x < -4 \cup +4 < x) = \text{NORMVERT}(-4; 0; 1; \text{WAHR}) + 1 - \text{NORMVERT}(+4; 0; 1; \text{WAHR}) = 0,0032\% + 0,0032\% = 0,00633\%$
- Zwischenanteil  $p(-1 < x < 1) = \text{NORMVERT}(1; 0; 1; \text{WAHR}) - \text{NORMVERT}(-1; 0; 1; \text{WAHR}) = 84,134\% - 15,865\% = 68,27\%$

<sup>1</sup> Ich verwende den  $G$ ,  $G_O$  und  $G_U$  für Grenzwerte, weil es Metalltechnikern von Toleranzen her geläufig ist.



### 3 Grenzwerte für vorgegebene Anteile

Die Grenzwerte  $G$  sind die Umkehrung der Unter<sup>1</sup>- und Überschreitungsanteile aus Kapitel 2. Sie legen die Grenzen fest, unter (über) denen ein vorgegebener Anteil  $p$  einer Verteilung liegt. Eine typische Anwendung ist die Lebensdauer von Wälzlager: Nach welcher Zeit sind 10% der Wälzlager ausgefallen?

#### 3.1 Härten

Ein über lange Zeit beobachteter Härteprozess von Werkstücken ergab für die Härtewerte folgende Parameter:

$\mu =$	58,0 HRC
$\sigma =$	1,0 HRC

Bestimmen Sie den Grenzwert  $G$

- a) unterhalb dessen der Anteil  $p=12\%$  der Fertigung liegt.
- b) oberhalb dessen der Anteil  $p=1,2\%$  der Fertigung liegt.

Bestimmen Sie die (symmetrischen) Grenzwerte  $G_u$  und  $G_o$

- c) zwischen denen der Anteil  $p=60\%$  der Fertigung liegt.
- d) außerhalb derer der Anteil  $p=20\%$  der Fertigung liegt.

#### 3.2 Mindesthaltbarkeit

Wie gesetzlich vorgeschrieben untersucht ein Lebensmittelproduzent, nach welcher Zeit seine Produkte zulässige Grenzwerte überschreiten. Seine Versuchsreihe ist normalverteilt (Parameter siehe rechts).

$\mu =$	1500 Tage
$\sigma =$	300 Tage

- a) Nach welcher Zeit muss das Mindesthaltbarkeitsdatum ablaufen, wenn bis dahin nur 1% der Lebensmittel zulässige Grenzwerte überschreiten dürfen?

#### 3.3 Vorsorgeuntersuchung

Die Körpergröße von Kindern an ihrem 5. Geburtstag ist normalverteilt (siehe rechts). Bei einer Vorsorgeuntersuchung wird als auffällig gewertet, wenn die Körpergröße außerhalb der 95%-Wahrscheinlichkeit liegt.

$\mu =$	110,5 cm
$\sigma =$	4,5 cm

- a) Wie groß sind die Grenzwerte  $G_u$  und  $G_o$ , innerhalb derer 95% der Kinder liegen?

Lösungen (Erklärungen siehe Arbeitsblatt ..... ) in der Schreibweise von Tabellenkalkulationen:

Tabellenkalkulationen rechnen Grenzwerte für Unterschreitungsanteile, die anderen Grenzwerte müssen abgeleitet werden (Stand 2009).

#### 3.1 Härten

- a) Grenzwert  $G_o$  ( $>p=12\%$ ) = 56,83 HRC =  $\text{NORMINV}(p;\mu;\sigma) = \text{NORMINV}(12\%;\mu;\sigma)$
- b) Grenzwert  $G_u$  ( $<p=1,2\%$ ) = 60,26 HRC =  $\text{NORMINV}(1-p;\mu;\sigma) = \text{NORMINV}(98,8\%;\mu;\sigma)$ : 98,8% liegen unterhalb der oberen Grenze
- c) Äußerer Grenzwert  $G_u$  ( $<p=60\%$ ) = 57,16 HRC =  $\text{NORMINV}((1-p)/2;\mu;\sigma) = \text{NORMINV}(20\%;\mu;\sigma)$ : 20% liegen unterhalb der unteren Grenze  
Äußerer Grenzwert  $G_o$  ( $>p=60\%$ ) = 58,84 HRC =  $\text{NORMINV}((1+p)/2;\mu;\sigma) = \text{NORMINV}(80\%;\mu;\sigma)$ : 80% liegen unterhalb der oberen Grenze
- d) Innerer Grenzwert  $G_u$  ( $>p=20\%/2$ ) = 56,72 HRC =  $\text{NORMINV}(p/2;\mu;\sigma) = \text{NORMINV}(10\%;\mu;\sigma)$ : 10% liegen unterhalb der unteren Grenze  
Innerer Grenzwert  $G_o$  ( $<p=20\%/2$ ) = 59,28 HRC =  $\text{NORMINV}(1-p/2;\mu;\sigma) = \text{NORMINV}(90\%;\mu;\sigma)$ : 90% liegen unterhalb der oberen Grenze

#### 3.2 Mindesthaltbarkeit

- a) Oberer Grenzwert  $G_o$  ( $>p=1\%$ ) = 802 Tage =  $\text{NORMINV}(p;\mu;\sigma)$

#### 3.3 Vorsorgeuntersuchung

- a) Äußerer Grenzwert  $G_u$  ( $<p=95\%$ ) = 101,7 cm =  $\text{NORMINV}((1-p)/2;\mu;\sigma) = \text{NORMINV}(2,5\%;\mu;\sigma)$ : 2,5% liegen unterhalb der unteren Grenze  
Äußerer Grenzwert  $G_o$  ( $>p=95\%$ ) = 119,3 cm =  $\text{NORMINV}((1+p)/2;\mu;\sigma) = \text{NORMINV}(97,5\%;\mu;\sigma)$ : 97,5% liegen unterhalb der oberen Grenze

<sup>1</sup> Einige Fachbegriffe: Grenzwerte für Unterschreitungsanteile heißen auch Quantil oder p-Quantil  $x_p$ . Eine Perzentile ist eine Quantile mit einem Unterschreitungsanteil, der eine ganzzahlige Prozentzahl beträgt. Eine Quartile ist eine Quantile mit dem Unterschreitungsanteil 25% oder 75%. Der Median ist die Quantile mit dem Unterschreitungsanteil 50%. Die beiden Quartilen und der Median teilen eine Verteilung in 4 Bereiche, die gleich große Mengen enthalten. Mit dem Mittelwert ist der Median i.d.R. nur dann identisch, wenn die Verteilung symmetrisch ist, so wie die Normalverteilung.



## 4 Maschinen- und Prozessfähigkeit

### 4.1 Drehautomat

Es soll geprüft werden, ob auf einem Drehautomaten die Fertigung von Bolzen DIN 1445 - 10h11x30 mit 6- $\sigma$  beherrscht wird. Um Kosten zu sparen, beginnt man mit der Maschinenfähigkeitsuntersuchung, fertigt eine kleine Stückzahl unter idealen Bedingungen, misst die Teile und ermittelt die rechts stehenden Parameter:

- Ermitteln Sie den Maschinenfähigkeitsindex  $c_m$ .
- Ermitteln Sie den kritischen Maschinenfähigkeitsindex  $c_{mk}$ .
- Ist der Prozess fähig für 6- $\sigma$ ?
- Ist es sinnvoll, die Untersuchung weiterzuführen?

Toleranz:

$$G_o = 10,000 \text{ mm}$$

$$G_u = 9,910 \text{ mm}$$

bei 6- $\sigma$ -Fertigung

Maschinenfähigkeit

Testergebnis:

$$s_m = 9,0 \text{ } \mu\text{m}$$

$$\bar{x}_m = 9,950 \text{ mm}$$

Da die Maschinenfähigkeitsuntersuchung die erforderlichen Werte erreicht, wird mit einer Prozessfähigkeitsuntersuchung fortgesetzt. Dabei fertigt man eine größere Serie unter realen Bedingungen und ermittelt die neuen Parameter.

- Ermitteln Sie den Prozessfähigkeitsindex  $c_p$ .
- Ermitteln Sie den kritischen Prozessfähigkeitsindex  $c_{pk}$ .
- Ist der Prozess beherrscht für 6- $\sigma$ ?
- Würden die Werte auch für 8- $\sigma$  genügen?
- Was müsste in der Fertigung geändert werden, um 8- $\sigma$  erreichen?
- In welchem Bereich darf der Mittelwert der Fertigung schwanken, um 8- $\sigma$  zu erfüllen?

Prozessfähigkeit

Testergebnis:

$$s_p = 10,0 \text{ } \mu\text{m}$$

$$\bar{x}_p = 9,945 \text{ mm}$$

### 4.2 Schleifmaschine

Eine Schleifmaschine fertigt seit längerer Zeit Zylinderstifte  $\varnothing 6\text{m}6$ , die Fertigung ist normalverteilt (Parameter siehe rechts). Ein Kunde, der nach einer Lieferung fragt, verlangt eine 6- $\sigma$ -Fertigung.

Fertigung:

$$\sigma = 1,0 \text{ } \mu\text{m}$$

$$\mu = 6,007 \text{ mm}$$

- Ermitteln Sie den Prozessfähigkeitsindex  $c_p$ .
- Ermitteln Sie den kritischen Prozessfähigkeitsindex  $c_{pk}$ .
- Kann die Forderung des Kunden erfüllt werden?
- Würden die Werte auch für 8- $\sigma$  genügen?
- Was müsste in der Fertigung geändert werden, um 8- $\sigma$  erreichen?
- In welchem Bereich darf der Mittelwert der Fertigung schwanken, um 6- $\sigma$  zu erfüllen?

Toleranz:

$$G_u = 6,004 \text{ mm}$$

$$G_o = 6,012 \text{ mm}$$

Kunde verlangt 6- $\sigma$

### 4.3 Messreihen aus Aufgabe 1

Bewerten Sie die Messreihen hinsichtlich ihrer Maschinen- bzw. Prozessfähigkeit.

Lösungen in der Schreibweise von Tabellenkalkulationen:

#### 4.1 Drehautomat

- Maschinenfähigkeitsindex  $c_m = (G_o - G_u)/(6 \cdot s) = (10 - 9,910)\text{mm} / (6 \cdot 0,009\text{mm}) = 1,667$
- Kritischer Maschinenfähigkeitsindex  $c_{mk} = \min(G_o - \bar{x}; \bar{x} - G_u)/(3 \cdot s) = (9,950 - 9,910)\text{mm} / (3 \cdot 0,009\text{mm}) = 1,481$
- Der Prozess ist fähig (maschinenfähig), da  $c_m$  bzw.  $c_{mk} > 1,00$  sind (Der Wert gilt für 6- $\sigma$ )
- Die Untersuchung kann fortgeführt werden, da  $c_m$  bzw.  $c_{mk} > 1,33$  sind (Eine Stufe höher als für die Prozessfähigkeit erforderlich).
- Prozessfähigkeitsindex  $c_p = (G_o - G_u)/(6 \cdot s) = (10 - 9,910)\text{mm} / (6 \cdot 0,010\text{mm}) = 1,500$
- Kritischer Prozessfähigkeitsindex  $c_{pk} = \min(G_o - \bar{x}; \bar{x} - G_u)/(3 \cdot s) = (9,945 - 9,910)\text{mm} / (3 \cdot 0,010\text{mm}) = 1,167$
- Der Prozess ist beherrscht (prozessfähig), da  $c_p$  bzw.  $c_{pk} > 1,00$  sind (Der Wert gilt für 6- $\sigma$ )
- Der Prozessfähigkeitsindex  $c_p = 1,500 > 1,33$  würde ausreichen, aber der kritische Prozessfähigkeitsindex  $c_{pk} = 1,167 < 1,33$  ist zu klein.
- Da der Prozessfähigkeitsindex  $c_p = 1,500 > 1,33$  ausreicht, genügt es, die Fertigung zu zentrieren.
- Für 8- $\sigma$  muss der Mittelwert  $\bar{x}$  der Fertigung mindestens 4  $\sigma$  Abstand von den Toleranzgrenzen halten.  

$$\bar{x}_{\min} = G_u + 4 \cdot s = 9,910 \text{ mm} + 4 \cdot 0,010 \text{ mm} = 9,950 \text{ mm}$$

$$\bar{x}_{\max} = G_o - 4 \cdot s = 10,000 \text{ mm} - 4 \cdot 0,010 \text{ mm} = 9,960 \text{ mm}$$

#### 4.2 Schleifmaschine

- Prozessfähigkeitsindex  $c_p = (G_o - G_u)/(6 \cdot s) = (6,012 - 6,004)\text{mm} / (6 \cdot 0,001\text{mm}) = 1,33$
- Kritischer Prozessfähigkeitsindex  $c_{pk} = \min(G_o - \bar{x}; \bar{x} - G_u)/(3 \cdot s) = (6,007 - 6,004)\text{mm} / (3 \cdot 0,001\text{mm}) = 1,00$
- Der Prozess ist beherrscht (prozessfähig) für 6- $\sigma$ , da  $c_p > 1,00$  ist. Da  $c_{pk} = 1,00$  knapp ist, sollte die Fertigung zentriert werden.
- Der Prozessfähigkeitsindex  $c_p = 1,33$  würde theoretisch ausreichen, aber der kritische Prozessfähigkeitsindex  $c_{pk} = 1,00 < 1,33$  ist zu klein.
- Da  $c_p = 1,33$  gerade an der Grenze liegt, sollte die Fertigung nicht nur zentriert, sondern auch ihre Streuung verringert werden.
- Für 6- $\sigma$  muss der Mittelwert  $\bar{x}$  der Fertigung mindestens 3  $\sigma$  Abstand von den Toleranzgrenzen halten.  

$$\bar{x}_{\min} = G_u + 3 \cdot s = 6,004 \text{ mm} + 3 \cdot 0,001 \text{ mm} = 6,007 \text{ mm}$$

$$\bar{x}_{\max} = G_o - 3 \cdot s = 6,012 \text{ mm} - 3 \cdot 0,001 \text{ mm} = 6,009 \text{ mm}$$

#### 4.3 Messreihen aus Aufgabe 1

- Lagerbuchse:  $c_m = (33039 - 33000)/(6 \cdot 4,499) = 1,44$ ;  $c_{mk} = (33039 - 33020,4)/(6 \cdot 4,499) = 1,38 > 1,33$  reicht aus für 6- $\sigma$ .
- Lagerbuchse:  $c_p = (39 - 0)/(6 \cdot 5,561) = 1,169$ ;  $c_{pk} = (19,28 - 0)/(3 \cdot 5,561) = 1,156 > 1,0$  reicht aus für 6- $\sigma$
- Zylinderstift:  $c_m = (12 - 4)/(6 \cdot 0,7626) = 1,748$ ;  $c_{mk} = (7,5 - 4)/(3 \cdot 0,7626) = 1,530$   $c_m > 1,66$  reicht,  $c_{mk}$  reicht nicht  $\rightarrow$  zentrieren
- Zylinderstift:  $c_p = (12 - 4)/(6 \cdot 0,827) = 1,612$ ;  $c_{pk} = (7,36 - 4)/(3 \cdot 0,827) = 1,354 > 1,33$  reicht knapp für 8- $\sigma$



#### 4.4 Buchsen aus Sintermetall

Für eine Anfrage nach Buchsen  $\varnothing 30G7$  wurde eine Prozessfähigkeitsuntersuchung durchgeführt und die rechts stehenden Werte ermittelt.

$$s = 2,25 \mu\text{m}$$

$$\bar{x} = 30,018 \text{ mm}$$

Der Kunde verlangt eine  $8\text{-}\sigma$ -Fertigung.

- Reicht die Streuung der Maschine aus?
- Wie liegt die Probe als Normalverteilung im Toleranzfeld ? (Skizze)
- Entspricht die Probe der Forderung?
- Würde die Probe auch für 10 Sigma genügen?
- Was muss geändert werden, damit die Fertigung auch 10 Sigma erreicht?

#### 4.5 Ventile

Eine Ventil-Fertigung soll auf einen neuen Werkstoff umgestellt werden. Um festzustellen, ob die neue Fertigung beherrscht ist, wird eine Prozessfähigkeitsuntersuchung für den Schaft  $\varnothing 10 \pm 0,02$  durchgeführt.

$$s = 0,004 \text{ mm}$$

$$\bar{x} = 10,005 \text{ mm}$$

- Ermitteln Sie die Indizes für die Prozessfähigkeit und die kritische Prozessfähigkeit.
- Beurteilen Sie die Prozessfähigkeit, wenn  $c_p > 1,66$  und  $c_{pk} > 1,33$  gefordert ist.

#### 4.6 Entwurf

Aus einer Fertigung von .....  $\varnothing 120h9$  wurde eine Stichprobe entnommen, gemessen und die rechts stehenden Werte ermittelt.

$$s = 9,6 \mu\text{m}$$

$$\bar{x} = 119,960 \text{ mm}$$

- Reicht die Streuung der Maschine aus? (Qualitätsanforderung 8s)
- In welchem Bereich muss der Mittelwert der Fertigung liegen?
- Berechnen Sie die Prozessfähigkeit.

Lösungen:

#### 4.4 Buchsen aus Sintermetall

Das Maß  $\varnothing 30G7$  hat die Abmaße  $ES = 28 \mu\text{m}$  und  $EI = 7 \mu\text{m}$  bzw. die Grenzmaße  $G_o = 30,028 \text{ mm}$  und  $G_u = 30,007 \text{ mm}$

$$a) c_p = \frac{T}{6 \cdot s} = \frac{ES - EI}{6 \cdot s} = \frac{28 \mu\text{m} - 7 \mu\text{m}}{6 \cdot 2,25 \mu\text{m}} = 1,55 \text{ reicht aus, da größer } 1,33 \text{ (für 8 Sigma). b) näher an der oberen Toleranzgrenze } 30,028 \text{ mm.}$$

$$c) c_{pk} = \frac{\Delta_{krit}}{3 \cdot s} = \frac{(30,028 - 30,018) \text{ mm}}{3 \cdot 2,25 \mu\text{m}} = 1,48 \text{ reicht auch; d) Nein, da } c_{pk} < 1,66; e) \text{ Streuung verringern: } s < \frac{T}{6 \cdot c_{eff}} = \frac{ES - EI}{6 \cdot 1,66} = \frac{28 - 7}{10} = 2,1 \mu\text{m}$$

#### 4.5 Ventile

$$a) c_p = \frac{T}{6 \cdot s} = \frac{es - ei}{6 \cdot s} = \frac{0,02 \text{ mm} - (-0,02 \text{ mm})}{6 \cdot 0,004 \text{ mm}} = 1,67 ; c_{pk} = \frac{\Delta_{krit}}{3 \cdot s} = \frac{(10,02 - 10,005) \text{ mm}}{3 \cdot 0,004 \text{ mm}} = 1,25$$

b)  $c_p$  ist nur knapp erreicht,  $c_{pk}$  gar nicht. Der Prozess muss zentriert werden.

#### 4.6 Entwurf

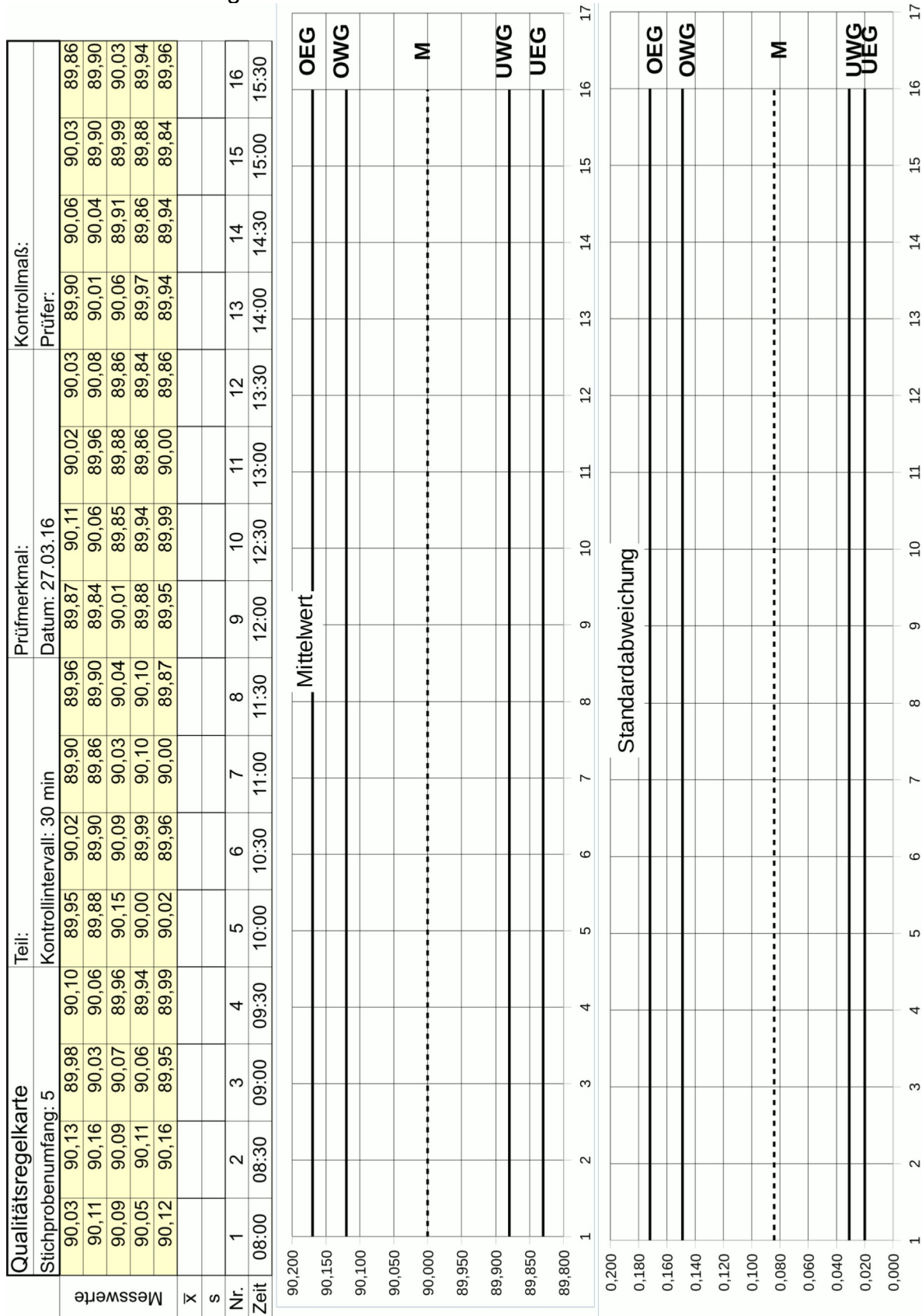
$$a) c_p = \frac{T}{6 \cdot s} = \frac{es - ei}{6 \cdot s} = \frac{0 - (-87 \mu\text{m})}{6 \cdot 9,6 \mu\text{m}} = 1,51 > 1,33 \text{ reicht für 8 Sigma. c) } c_{pk} = \frac{\Delta_{krit}}{3 \cdot s} = \frac{(120 - 119,960) \text{ mm}}{3 \cdot 9,6 \mu\text{m}} = 1,38$$

$$b) c_{pk} = \frac{\Delta_{krit}}{3 \cdot s} \rightarrow \Delta_{krit} = c_{kerf} \cdot 3 \cdot s = 1,33 \cdot 3 \cdot 9,6 \mu\text{m} = 38,4 \mu\text{m} \text{ ist der Mindestabstand zu den Toleranzgrenzen } (119,952 \text{ mm} < \mu < 119,961 \text{ mm})$$



## 5 $\bar{x}$ -s-Qualitätsregelkarte ausfüllen und bewerten

- Berechnen Sie die fehlenden Parameter  $\bar{x}$  und  $s$  der Stichproben.
- Tragen Sie die Ergebnisse in die Regelkarten ein.
- Bewerten Sie die Ergebnisse.

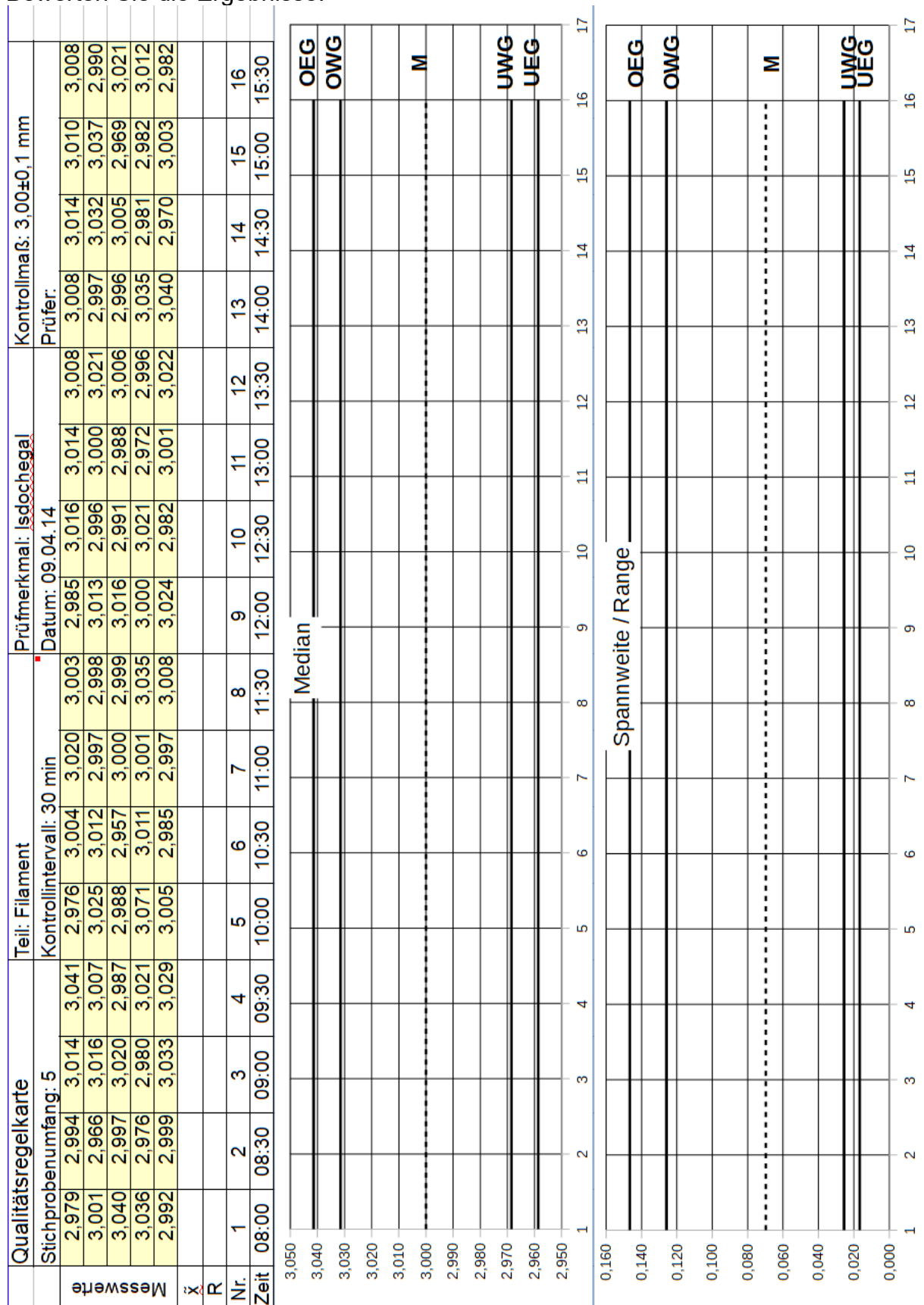


Lösungen siehe Anhang



## 6 $\bar{x}$ -R-Qualitätsregelkarte ausfüllen und bewerten

- Berechnen Sie die fehlenden Parameter  $\bar{x}$  und R der Stichproben.
- Tragen Sie die Ergebnisse in die Regelkarten ein.
- Bewerten Sie die Ergebnisse.



Lösungen siehe Anhang



## 7 Grenzwerte für $\bar{x}$ -s-Qualitätsregelkarten

### 7.1 Lagerbuchsen

Die Fertigung der Lagerbuchsen  $\varnothing 33H8$  aus Aufgabe 1.2 soll mit  $\bar{x}$ -s-Regelkarten überwacht werden. Vorgesehen sind stündliche Stichproben vom Umfang  $n = 5$ . Die Grenzen der Regelkarten sollen mit den Daten der Prozessfähigkeitsuntersuchung berechnet werden (siehe rechts).

$$\begin{aligned}\mu &= 33,019 \text{ mm} \\ \sigma &= 5,561 \text{ } \mu\text{m} \\ n &= 5\end{aligned}$$

Ermitteln Sie

- Obere Eingriffsgrenze für die Mittelwertspur OEG ( $\bar{x}$ )
- Obere Warngrenze für die Mittelwertspur OWG ( $\bar{x}$ )
- Mittelinie für die Mittelwertspur M ( $\bar{x}$ )
- Untere Warngrenze für die Mittelwertspur UWG ( $\bar{x}$ )
- Untere Eingriffsgrenze für die Mittelwertspur UEG ( $\bar{x}$ )
- Obere Eingriffsgrenze für die Standardabweichungsspur OEG (s)
- Obere Warngrenze für die Standardabweichungsspur OWG (s)
- Mittelinie für die Standardabweichungsspur M (s)
- Untere Warngrenze für die Standardabweichungsspur UWG (s)
- Untere Eingriffsgrenze für die Standardabweichungsspur UEG (s)
- Skizzieren Sie die Regelkarten

### 7.2 Zylinderstifte

Ermitteln Sie die Grenzen von  $\bar{x}$ -s-Regelkarten für den Stichprobenumfang  $n = 10$  auf der Grundlage der Prozessfähigkeitsuntersuchung der Zylinderstifte  $\varnothing 4m6$  (Aufgabe 1.4).

$$\begin{aligned}\mu &= 4,008 \text{ mm} \\ \sigma &= 0,827 \text{ } \mu\text{m} \\ n &= 10\end{aligned}$$

	OEG	OWG	M	UWG	UEG
Mittelwertspur $\bar{x}$	a)	b)	c)	d)	e)
Standardabweichungsspur s	f)	g)	h)	i)	j)

### 7.3 Noch ein paar Gemeinheiten -- äh -- Verständnisfragen

- Für die Lagerbuchsen (Aufgabe 1.2) sind 6- $\sigma$  gefordert, für die Zylinderstifte (Aufgabe 1.4) 8- $\sigma$ . Das bedeutet doch, dass die Toleranz bei den Zylinderstiften weniger ausgenutzt werden darf als bei den Lagerbuchsen. Warum werden in beiden Fällen die Grenzen der Regelkarte nach den gleichen Formeln berechnet?

Lösungen in der Schreibweise von Tabellenkalkulationen und mit Tabellenwerten:

#### 7.1 Lagerbuchsen

- $OEG(\bar{x}) = \mu + \text{Konfidenz}(1\%; \sigma; n) = 33,0195 \text{ mm} + \text{Konfidenz}(1\%; 5,561 \mu\text{m}; 5) = 33,0195 \text{ mm} + 1,152 \cdot 5,561 \mu\text{m} = 33,0259 \text{ mm}$
- $OWG(\bar{x}) = \mu + \text{Konfidenz}(5\%; \sigma; n) = 33,0195 \text{ mm} + \text{Konfidenz}(5\%; 5,561 \mu\text{m}; 5) = 33,0195 \text{ mm} + 0,877 \cdot 5,561 \mu\text{m} = 33,0244 \text{ mm}$
- $M(\bar{x}) = \mu = 33,0195 \text{ mm}$
- $UWG(\bar{x}) = \mu - \text{Konfidenz}(5\%; \sigma; n) = 33,0195 \text{ mm} - \text{Konfidenz}(5\%; 5,561 \mu\text{m}; 5) = 33,0195 \text{ mm} - 0,877 \cdot 5,561 \mu\text{m} = 33,0146 \text{ mm}$
- $UEG(\bar{x}) = \mu - \text{Konfidenz}(1\%; \sigma; n) = 33,0195 \text{ mm} - \text{Konfidenz}(1\%; 5,561 \mu\text{m}; 5) = 33,0195 \text{ mm} - 1,152 \cdot 5,561 \mu\text{m} = 33,0131 \text{ mm}$
- $OEG(s) = \sigma \cdot \text{WURZEL}((\text{ChiInv}(0,5\%; n-1))/(n-1)) = 5,561 \mu\text{m} \cdot \text{WURZEL}((\text{ChiInv}(0,5\%; 5-1))/(5-1)) = 5,561 \mu\text{m} \cdot 1,9275 = 10,719 \mu\text{m}$
- $OWG(s) = \sigma \cdot \text{WURZEL}((\text{ChiInv}(2,5\%; n-1))/(n-1)) = 5,561 \mu\text{m} \cdot \text{WURZEL}((\text{ChiInv}(2,5\%; 5-1))/(5-1)) = 5,561 \mu\text{m} \cdot 1,6691 = 9,282 \mu\text{m}$
- $M(s) = \sigma \cdot 0,940 \text{ (aus Tabelle)} = 5,561 \mu\text{m} \cdot 0,940 = 5,227 \mu\text{m}$
- $UWG(s) = \sigma \cdot \text{WURZEL}((\text{ChiInv}(97,5\%; n-1))/(n-1)) = 5,561 \mu\text{m} \cdot \text{WURZEL}((\text{ChiInv}(97,5\%; 5-1))/(5-1)) = 5,561 \mu\text{m} \cdot 0,3480 = 1,935 \mu\text{m}$
- $UEG(s) = \sigma \cdot \text{WURZEL}((\text{ChiInv}(99,5\%; n-1))/(n-1)) = 5,561 \mu\text{m} \cdot \text{WURZEL}((\text{ChiInv}(99,5\%; 5-1))/(5-1)) = 5,561 \mu\text{m} \cdot 0,2275 = 1,265 \mu\text{m}$

#### 7.2 Zylinderstifte

- $OEG(\bar{x}) = \mu + \text{Konfidenz}(1\%; \sigma; n) = 4,008 \text{ mm} + \text{Konfidenz}(1\%; 0,827 \mu\text{m}; 10) = 4,008 \text{ mm} + 0,815 \cdot 0,827 \mu\text{m} = 4,008674 \text{ mm}$
- $OWG(\bar{x}) = \mu + \text{Konfidenz}(5\%; \sigma; n) = 4,008 \text{ mm} + \text{Konfidenz}(5\%; 0,827 \mu\text{m}; 10) = 4,008 \text{ mm} + 0,620 \cdot 0,827 \mu\text{m} = 4,008513 \text{ mm}$
- $M(\bar{x}) = \mu = 4,008 \text{ mm}$
- $UWG(\bar{x}) = \mu - \text{Konfidenz}(5\%; \sigma; n) = 4,008 \text{ mm} - \text{Konfidenz}(5\%; 0,827 \mu\text{m}; 10) = 4,008 \text{ mm} - 0,620 \cdot 0,827 \mu\text{m} = 4,007487 \text{ mm}$
- $UEG(\bar{x}) = \mu - \text{Konfidenz}(1\%; \sigma; n) = 4,008 \text{ mm} - \text{Konfidenz}(1\%; 0,827 \mu\text{m}; 10) = 4,008 \text{ mm} - 0,815 \cdot 0,827 \mu\text{m} = 4,007326 \text{ mm}$
- $OWG(s) = \sigma \cdot \text{WURZEL}((\text{ChiInv}(0,5\%; n-1))/(n-1)) = 0,827 \mu\text{m} \cdot \text{WURZEL}((\text{ChiInv}(0,5\%; 10-1))/(10-1)) = 0,827 \mu\text{m} \cdot 1,6190 = 1,339 \mu\text{m}$
- $OEG(s) = \sigma \cdot \text{WURZEL}((\text{ChiInv}(2,5\%; n-1))/(n-1)) = 0,827 \mu\text{m} \cdot \text{WURZEL}((\text{ChiInv}(2,5\%; 10-1))/(10-1)) = 0,827 \mu\text{m} \cdot 1,4538 = 1,202 \mu\text{m}$
- $OWG(s) = \sigma \cdot 0,973 \text{ (aus Tabelle)} = 0,827 \mu\text{m} \cdot 0,973 = 0,805 \mu\text{m}$
- $UWG(s) = \sigma \cdot \text{WURZEL}((\text{ChiInv}(97,5\%; n-1))/(n-1)) = 0,827 \mu\text{m} \cdot \text{WURZEL}((\text{ChiInv}(97,5\%; 10-1))/(10-1)) = 0,827 \mu\text{m} \cdot 0,5478 = 0,453 \mu\text{m}$
- $UEG(s) = \sigma \cdot \text{WURZEL}((\text{ChiInv}(99,5\%; n-1))/(n-1)) = 0,827 \mu\text{m} \cdot \text{WURZEL}((\text{ChiInv}(99,5\%; 10-1))/(10-1)) = 0,827 \mu\text{m} \cdot 0,4391 = 0,363 \mu\text{m}$

### 7.3 Noch ein paar Gemeinheiten -- äh -- Verständnisfragen

- Die engeren Grenzen, die bei 8- $\sigma$  erforderlich sind, ergeben sich daraus, dass bei 8- $\sigma$  die Streuung  $\sigma$  kleiner sein muss als bei 6- $\sigma$ .





## 8 Grenzwerte für $\bar{x}$ -R-Qualitätsregelkarten

### 8.1 Lagerbuchsen

Die Fertigung der Lagerbuchsen  $\varnothing 33H8$  aus Aufgabe 1.2 soll mit  $\bar{x}$ -R-Regelkarten überwacht werden. Vorgesehen sind stündliche Stichproben vom Umfang  $n = 5$ . Die Grenzen der Regelkarten sollen mit den Daten der Prozessfähigkeitsuntersuchung berechnet werden (siehe rechts).

Ermitteln Sie

- Obere Eingriffsgrenze für die Medianspur OEG ( $\bar{x}$ )
- Obere Warngrenze für die Medianspur OWG ( $\bar{x}$ )
- Mittelinie für die Medianspur M ( $\bar{x}$ )
- Untere Warngrenze für die Medianspur UWG ( $\bar{x}$ )
- Untere Eingriffsgrenze für die Medianspur UEG ( $\bar{x}$ )
- Obere Eingriffsgrenze für die Spannweitemspur OEG (R)
- Obere Warngrenze für die Spannweitemspur OWG (R)
- Mittelinie für die Spannweitemspur M (R)
- Untere Warngrenze für die Spannweitemspur UWG (R)
- Untere Eingriffsgrenze für die Spannweitemspur UEG (R)
- Skizzieren Sie die Regelkarten

$$\mu = 33,019 \text{ mm}$$

$$\sigma = 5,561 \text{ } \mu\text{m}$$

$$n = 5$$

### 8.2 Zylinderstifte

Ermitteln Sie die Grenzen von  $\bar{x}$ -R-Regelkarten für den Stichprobenumfang  $n = 10$  auf der Grundlage der Prozessfähigkeitsuntersuchung der Zylinderstifte  $\varnothing 4m6$  (Aufgabe 1.4).

$$\mu = 4,008 \text{ mm}$$

$$\sigma = 0,827 \text{ } \mu\text{m}$$

$$n = 10$$

	OEG	OWG	M	UWG	UEG
Medianspur ( $\bar{x}$ )	a)	b)	c)	d)	e)
Spannweiten- spur (R)	f)	g)	h)	i)	j)

Lösungen nach [EuroTabM46] S.283:

8.1 Lagerbuchsen

$$\begin{aligned} \text{a) OEG}(\bar{x}) &= \mu + C_E \cdot \sigma = 33,019 \text{ mm} + 1,379 \cdot 5,561 \text{ } \mu\text{m} = 33,027 \text{ mm} \\ \text{b) OWG}(\bar{x}) &= \mu + C_W \cdot \sigma = 33,019 \text{ mm} + 1,049 \cdot 5,561 \text{ } \mu\text{m} = 33,025 \text{ mm} \\ \text{c) M}(\bar{x}) &= \mu = 33,019 \text{ mm} \\ \text{d) UWG}(\bar{x}) &= \mu - C_W \cdot \sigma = 33,019 \text{ mm} - 1,049 \cdot 5,561 \text{ } \mu\text{m} = 33,013 \text{ mm} \\ \text{e) UEG}(\bar{x}) &= \mu - C_E \cdot \sigma = 33,019 \text{ mm} - 1,379 \cdot 5,561 \text{ } \mu\text{m} = 33,011 \text{ mm} \\ \text{f) OEG}(R) &= D_{OEG} \cdot \sigma = 4,886 \cdot 5,561 \text{ } \mu\text{m} = 0,0272 \text{ mm} \\ \text{g) OWG}(R) &= D_{OWG} \cdot \sigma = 4,197 \cdot 5,561 \text{ } \mu\text{m} = 0,0233 \text{ mm} \\ \text{h) M}(R) &= d_n \cdot \sigma = 2,326 \cdot 5,561 \text{ } \mu\text{m} = 0,0129 \text{ mm} \\ \text{i) UWG}(R) &= D_{UWG} \cdot \sigma = 0,850 \cdot 5,561 \text{ } \mu\text{m} = 0,0047 \text{ mm} \\ \text{j) UEG}(R) &= D_{UEG} \cdot \sigma = 0,555 \cdot 5,561 \text{ } \mu\text{m} = 0,0031 \text{ mm} \end{aligned}$$

8.2 Zylinderstifte

$$\begin{aligned} &= 4,008 \text{ mm} + 0,958 \cdot 0,827 \text{ } \mu\text{m} = 4,00879 \text{ mm} \\ &= 4,008 \text{ mm} + 0,729 \cdot 0,827 \text{ } \mu\text{m} = 4,00860 \text{ mm} \\ &= 4,008 \text{ mm} \\ &= 4,008 \text{ mm} - 0,729 \cdot 0,827 \text{ } \mu\text{m} = 4,00740 \text{ mm} \\ &= 4,008 \text{ mm} - 0,958 \cdot 0,827 \text{ } \mu\text{m} = 4,00721 \text{ mm} \\ &= 5,418 \cdot 0,827 \text{ } \mu\text{m} = 0,00448 \text{ mm} \\ &= 4,784 \cdot 0,827 \text{ } \mu\text{m} = 0,00396 \text{ mm} \\ &= 3,078 \cdot 0,827 \text{ } \mu\text{m} = 0,00255 \text{ mm} \\ &= 1,674 \cdot 0,827 \text{ } \mu\text{m} = 0,00138 \text{ mm} \\ &= 1,335 \cdot 0,827 \text{ } \mu\text{m} = 0,00110 \text{ mm} \end{aligned}$$



## 9 Histogramme erstellen

Im Rahmen von Maschinen- bzw. Prozessfähigkeitsuntersuchungen für ..... wurden verschiedene Merkmale mit den Stichprobenumfängen  $n = 50$  bzw.  $n = 75$  geprüft und dabei die unten stehenden Messwerte ermittelt.

Aufgaben für jedes Merkmal:

- Klassieren Sie die Messwerte mithilfe einer Strichliste.
- Erstellen Sie ein Histogramm für die relativen Einzelklassenhäufigkeiten.
- Erstellen Sie ein Histogramm für die relativen Summenhäufigkeiten.
- Kennzeichnen Sie in den Histogrammen die Toleranzgrenzen.
- Beurteilen Sie die Verteilungen.

<p><b>9.1 Merkmal 1:</b> Breite 35 mm T=0,4mm; <math>G_o=35,2\text{mm}</math>; <math>G_u=34,8\text{mm}</math>; <math>n = 50</math></p> <p>35,02 35,03 35,02 34,98 35,08 35,01 35,01 35,07 34,99 35,03 34,92 35,00 34,98 35,04 35,05 34,93 34,97 35,02 35,05 34,99 35,03 34,97 34,99 34,94 35,11</p> <p>35,07 34,90 34,96 35,00 34,90 35,09 35,04 34,98 34,94 34,96 34,98 35,01 35,05 35,08 34,99 35,04 34,97 34,92 34,91 34,93 35,02 35,03 35,02 34,98 35,08</p>	<p><b>9.2 Merkmal 4:</b> Härte 250+50 HB T=50HB; <math>G_u=250\text{HB}</math>; <math>G_o=300\text{HB}</math>; <math>n = 50</math></p> <p>262 253 254 271 258 273 292 276 258 276 255 244 280 256 284 288 282 286 268 250 268 281 248 261 259</p> <p>264 278 274 257 277 256 280 285 265 283 291 252 281 259 249 265 279 256 260 260 274 284 278 280 277</p>
<p><b>9.3 Merkmal 2:</b> Parallelität 0,2 mm T=0,2mm; <math>n = 50</math></p> <p>0,15 0,07 0,17 0,10 0,05 0,03 0,06 0,11 0,09 0,07 0,06 0,05 0,08 0,05 0,06 0,08 0,08 0,02 0,14 0,12 0,06 0,06 0,10 0,05 0,07</p> <p>0,08 0,04 0,09 0,07 0,13 0,05 0,07 0,05 0,10 0,04 0,03 0,13 0,04 0,13 0,04 0,10 0,10 0,07 0,06 0,09 0,04 0,07 0,08 0,05 0,06</p>	<p><b>9.4 Merkmal 5:</b> Abstand <math>80 \pm 0,2</math> mm T=0,4mm; <math>G_u=79,8\text{mm}</math>; <math>G_o=80,2\text{mm}</math>; <math>n = 50</math></p> <p>80,04 80,18 80,16 80,14 80,12 80,14 80,12 80,10 80,18 80,16 80,18 80,18 80,20 80,20 80,08 80,16 80,18 80,14 80,12 80,16 80,14 80,02 80,20 80,16 80,20</p> <p>80,20 80,18 80,16 80,16 80,14 80,12 80,18 80,10 80,20 80,18 80,10 80,20 80,18 80,18 80,08 80,18 80,16 80,12 80,06 80,20 80,16 80,18 80,20 80,18 80,14</p>
<p><b>9.5 Merkmal 3:</b> Gesamtlänge <math>36,5 \pm 0,3\text{mm}</math> <math>G_u=36,20\text{mm}</math>; <math>G_o=36,80\text{mm}</math>; <math>n = 75</math></p> <p>36,30 36,28 36,32 36,38 36,32 36,32 36,28 36,32 36,34 36,40 36,30 36,36 36,42 36,42 36,22 36,36 36,30 36,40 36,24 36,26 36,24 36,28 36,26 36,20 36,40 36,32 36,28 36,38 36,40 36,38 36,32 36,26 36,46 36,34 36,30</p> <p>36,28 36,30 36,30 36,34 36,28 36,38 36,30 36,30 36,34 36,36 36,24 36,38 36,22 36,34 36,42 36,44 36,26 36,28 36,24 36,36 36,26 36,28 36,38 36,34 36,38 36,30 36,30 36,28 36,34 36,30 36,34 36,32 36,40 36,32 36,32 36,32 36,36 36,26 36,34 36,30</p>	<p><b>9.6 Merkmal 6:</b> Durchmesser 30 H7 <math>G_u=30,000\text{mm}</math>; <math>G_o=30,021\text{mm}</math>; <math>n = 75</math></p> <p>30,010 30,013 30,009 30,010 30,017 30,011 30,012 30,005 30,007 30,011 30,011 30,006 30,008 30,005 30,010 30,011 30,002 30,013 30,010 30,008 30,006 30,007 30,008 30,010 30,007 30,009 30,014 30,010 30,009 30,015 30,008 30,012 30,009 30,009 30,013</p> <p>30,004 30,012 30,010 30,011 30,011 30,015 30,010 30,010 30,009 30,008 30,010 30,009 30,010 30,003 30,008 30,006 30,012 30,009 30,008 30,007 30,009 30,012 30,011 30,004 30,013 30,012 30,011 30,011 30,007 30,010 30,014 30,011 30,010 30,010 30,008 30,009 30,012 30,007 30,011 30,008</p>



## 10 Gemischte Aufgaben

### 10.1 Anfrage

Ein Kunde fragt an, ob der Lieferant eine große Serie von Federblechen mit einer Härte von  $60 \pm 2$  HRC mit  $8 - \sigma$  fertigen könne. Dazu führt der Lieferant eine Prozessfähigkeitsuntersuchung durch und erhält die Messwerte rechts:

- Erstellen Sie das Histogramm der relativen Einzelhäufigkeiten.
- Ermitteln Sie die Mittelwert und Standardabweichung der Stichprobe.
- Berechnen Sie den kritischen Prozessfähigkeitskennwert  $c_{pk}$ .
- Bewerten Sie die Messwerte. Unter welchen Bedingungen kann der Lieferant die Kundenanforderung erfüllen?
- Welche Unterschiede bestehen zwischen Maschinen- und einer Prozessfähigkeit?
- Erläutern Sie, wie der kritischen Maschinenfähigkeitskennwert  $c_{mk}$  im Unterschied zu  $c_m$  ermittelt wird und welche Aussage er macht.

60,36	59,79	60,48	59,88	60,63
60,25	60,18	60,62	59,72	60,67
59,97	59,81	60,52	59,83	60,56
60,88	60,12	60,51	60,12	60,60
60,40	59,96	60,86	59,92	60,55
60,51	59,87	60,82	60,10	60,54
60,57	60,11	60,37	60,42	60,74
60,86	60,29	60,67	59,77	60,62
60,55	60,11	60,45	59,91	60,84
60,63	59,73	60,36	59,89	60,62
60,36	59,69	60,16	60,14	60,49
60,30	59,94	60,46	59,96	60,40
61,10	60,09	60,50	59,77	60,83
60,59	60,02	60,38	60,25	60,76
60,60	60,06	60,37	60,07	60,39
60,37	59,87	60,71	60,04	60,47
60,53	59,93	60,72	60,03	60,39
60,32	59,98	60,65	59,96	60,47
60,58	59,79	60,52	59,80	60,51
60,29	60,27	60,40	59,96	60,45
60,85	59,97	60,69	60,04	60,75
60,23	60,43	60,37	60,10	60,97

### 10.2 Auftrag

Der Lieferant hat den Auftrag erhalten, nachdem es gelungen ist, die Werte zu verbessern auf Mittelwert  $\bar{x} = 60,1$  HRC und Standardabweichung  $s = 0,3$  HRC.

$$\bar{x} = 60,1 \text{ HRC}$$

$$s = 0,3 \text{ HRC}$$

- Mit wie vielen ppm Ausschussteilen ist zu rechnen?
- Bis zu wie vielen  $\sigma$  kann mit diesen Werten gefertigt werden?

### 10.3 Qualitätsregelkarten

- Ermitteln Sie die Warn- und Eingriffsgrenzen für  $\bar{x}$  - R -Karten.
- Skizzieren Sie die zweispurige Regelkarte mit den nebenstehenden Werten.
- Aus der laufenden Fertigung werden stündlich Stichproben genommen. Tragen Sie die Stichproben in Ihre oben skizzierte Regelkarte ein.
- Beurteilen Sie die Stichproben, und schlagen Sie Maßnahmen vor.

08:00	59,66	60,40	60,02	59,92	60,69
09:00	59,62	59,39	60,41	60,31	60,17
10:00	59,89	60,34	60,11	60,30	60,19
11:00	60,11	60,05	59,81	59,95	59,72
12:00	60,08	60,00	60,56	60,18	60,37
13:00	60,04	59,99	59,90	60,29	60,00
14:00	59,84	60,33	59,97	60,35	60,05

### 10.4 Wie Aufg. 10.3 für $\bar{x}$ - s -Karten.



10.5 Ein Kunde fragt an, ob er eine große Serie spezieller Stifte mit  $8\text{-}\sigma$  fertigen könne. Das kritische Maß ist  $100d10$ .

Dazu führt der Lieferant eine Maschinenfähigkeitsuntersuchung durch und erhält die folgenden Messwerte.

- a) Erstellen Sie das Histogramm der relativen Einzelhäufigkeiten.
- b) Ermitteln Sie die Mittelwert und Standardabweichung der Stichprobe.
- c) Berechnen Sie den kritischen Maschinenfähigkeitskennwert  $c_{mk}$ .
- d) Beurteilen Sie den Prozess anhand der Messwerte, und schlagen Sie Möglichkeiten zur Verbesserung vor.
- e) Kann der Lieferant die Kundenanforderung erfüllen, wenn der Prozess zur Mitte der Toleranz verschoben werden kann ?

99,8204	99,8539	99,8381	99,8011	99,8651
99,8271	99,8237	99,8479	99,8378	99,8131
99,8162	99,8412	99,8336	99,8323	99,8259
99,8390	99,8199	99,8313	99,8161	99,7943
99,8318	99,8122	99,8334	99,8391	99,8108
99,8282	99,8160	99,7966	99,8236	99,8067
99,8453	99,8431	99,8438	99,8450	99,8430
99,8167	99,8337	99,8141	99,8310	99,8174
99,8335	99,8233	99,8295	99,8410	99,8116
99,8335	99,8449	99,8246	99,8517	99,8360

10.6 Im Rahmen der Prozessverbesserungen gelingt es, die Streuung des Prozesses zu verbessern.

Mittelwert  $\bar{x} = 99,812 \text{ mm}$

Standardabweichung  $s = 0,01350 \text{ mm}$

Gleichzeitig erhöht der Kunde seine Ansprüche und verlangt für den Folgeauftrag eine  $10\text{-}\sigma$ -Fertigung.

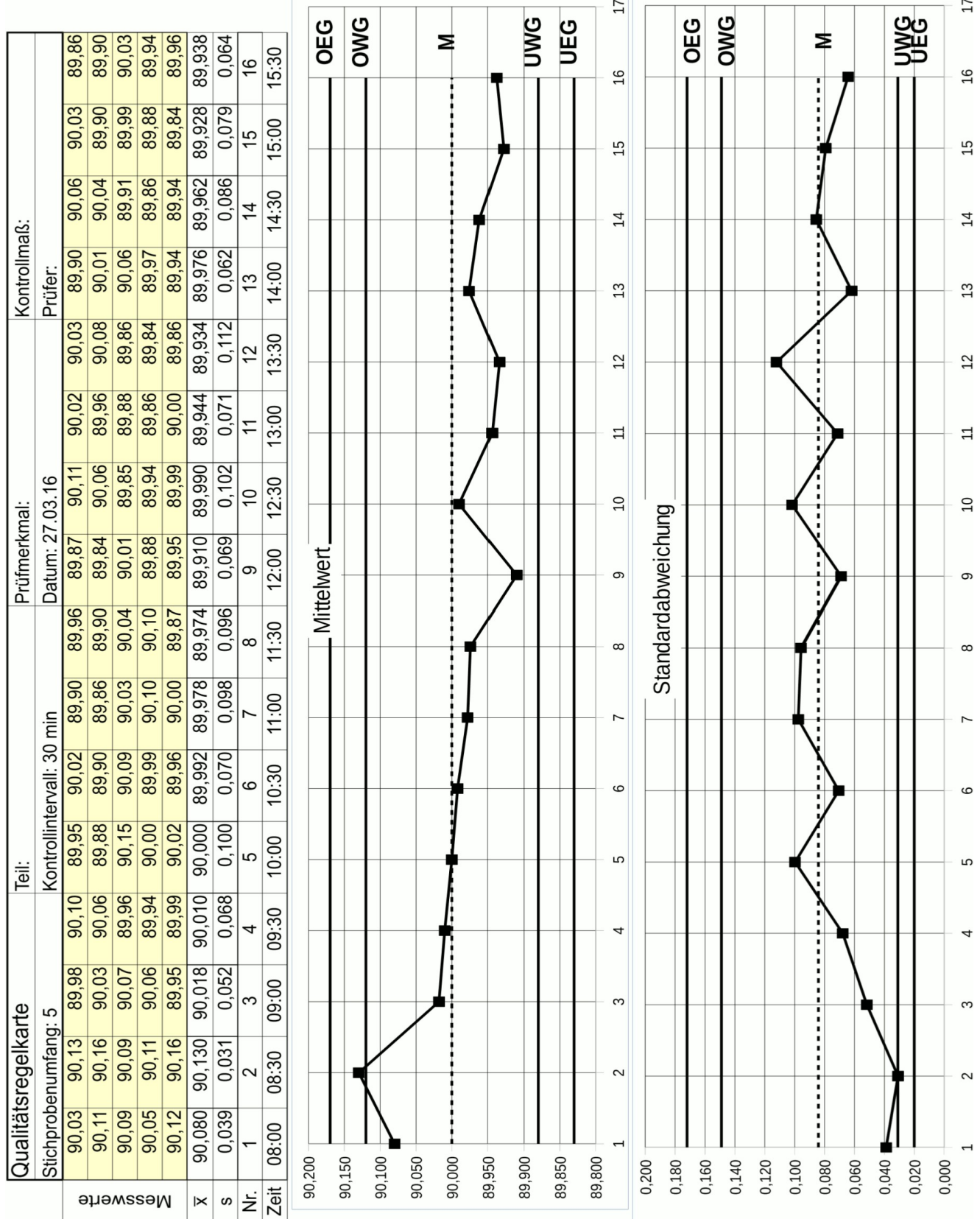
- a) Kann die neue Forderung erfüllt werden ?
- b) Wie hoch ist der Ausschussanteil jetzt ?
- c) Wie hoch wäre der Ausschussanteil, wenn der Kunde bei der  $8\text{-}\sigma$ -Forderung bliebe ?
- d) Mit wie vielen Ausschussteilen je 1 Million produzierter Teile ist zu rechnen ?
- e) Zur Prozessüberwachung sollen Prozessregelkarten (Mittelwert-Standardabweichungskarten) eingesetzt werden.

Ermitteln Sie die Warn- und Eingriffsgrenzen, und skizzieren Sie die Regelkarte.



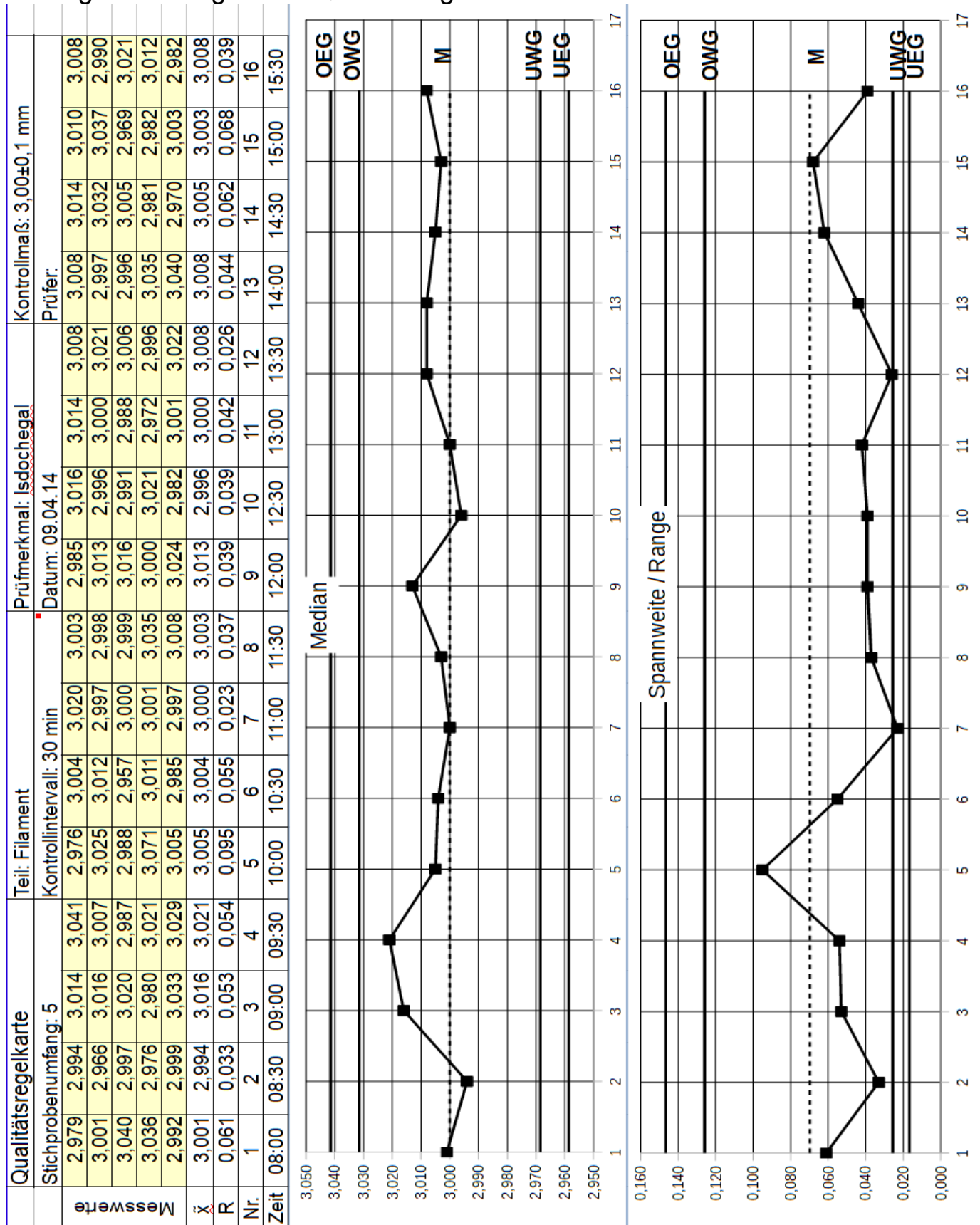
# 1 Lösungen

Lösungen zu Aufg. 5  $\bar{x}$ -s-Qualitätsregelkarte ausfüllen und bewerten





## Lösungen zu Aufg. 6 $\bar{x}$ -R-Qualitätsregelkarte ausfüllen und bewerten





## Lösungen zu Aufg. 9 Histogramme erstellen

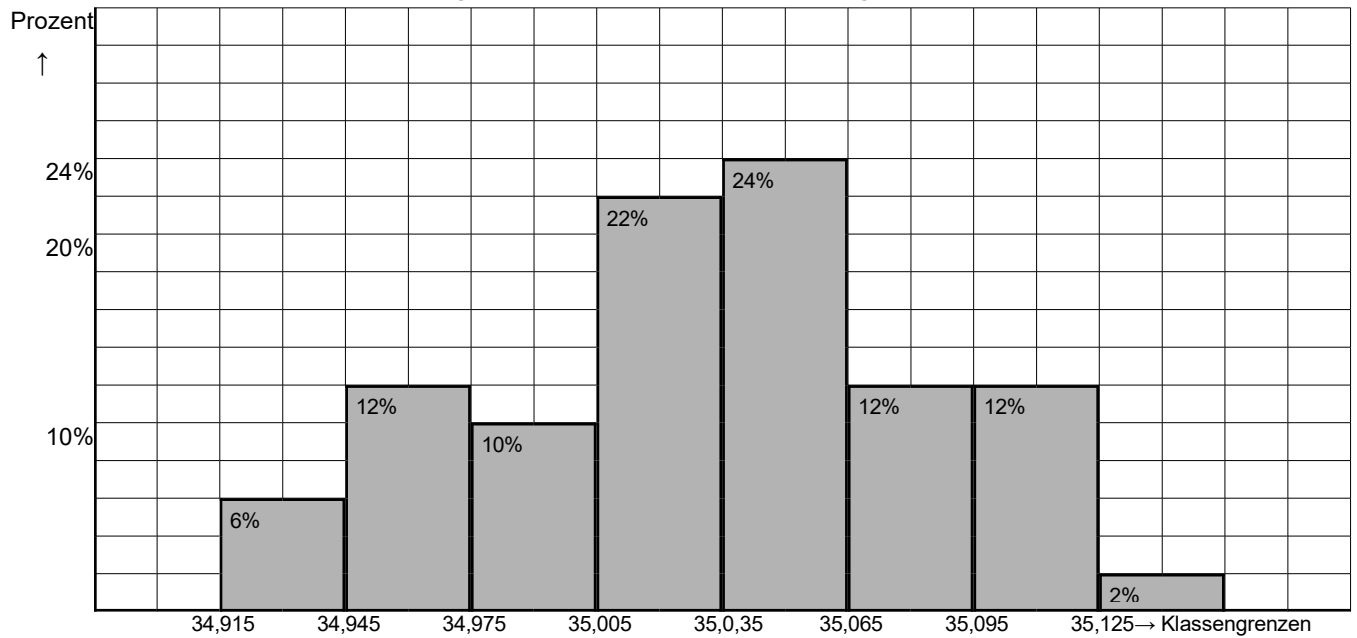
### Lösungen zu Aufg. 9a Einteilung in Klassen

Teil-Nr.:	4711	N=	5000	Prüfmerkmal 1: Breite	Nennwert: 35 mm	Datum, Prüfer									
Los-Nr.:	012345	n=	50	Prüfmaß: 35±0,2 mm	Höchstwert G <sub>0</sub> : 35,2 mm	angeliefert um									
		k=	8	Prüfmittel: Messschieber	Mindestwert G <sub>U</sub> : 34,8 mm	Datum: <heute>									
		w=	0,030 mm	Auflösung: 0,02 mm											
Messwerte x in															
von ≤	< bis unter	Summe F <sub>j</sub> der relativen Wahrscheinlichkeit										n <sub>j</sub>	G <sub>j</sub>	h <sub>j</sub>	H <sub>j</sub>
34,915	34,945		....	....	....	....	....	....	....	....	....	3	3	6%	6%
34,945	34,975		....	....	....	....	....	....	....	....	....	6	9	12%	18%
34,975	35,005		....	....	....	....	....	....	....	....	....	5	14	10%	28%
35,005	35,035			....	....	....	....	....	....	....	....	11	25	22%	50%
35,035	35,065			....	....	....	....	....	....	....	....	12	37	24%	74%
35,065	35,095		....	....	....	....	....	....	....	....	....	6	43	12%	86%
35,095	35,125		....	....	....	....	....	....	....	....	....	6	49	12%	98%
35,125	35,155	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	1	50	2%	100%
35,155	35,185	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....				
		....	....	....	....	....	....	....	....	....	....				
		....	....	....	....	....	....	....	....	....	....				
		....	....	....	....	....	....	....	....	....	....				
												Σ n <sub>j</sub> =	50	Σ h <sub>j</sub> =	100%

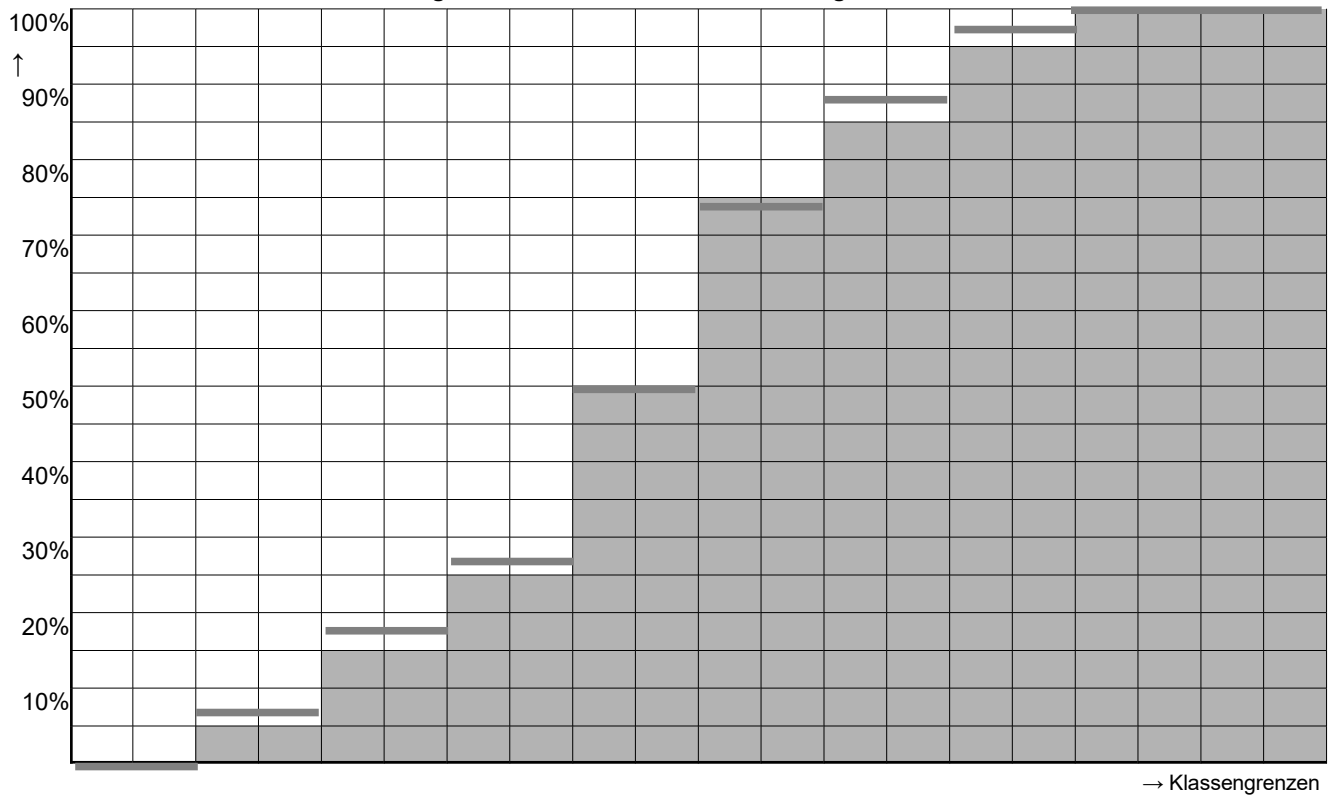


Teil-Nr.: 4711	Prüfmerkmal: Breite	Höchstwert $G_o$ : 35,2 mm	Datum: heute
Los-Nr.: 012345	Nennwert: 35 mm	Mindestwert $G_u$ : 34,8 mm	Ersteller: xyz

**Histogramm der relativen (Einzel-) Häufigkeiten**



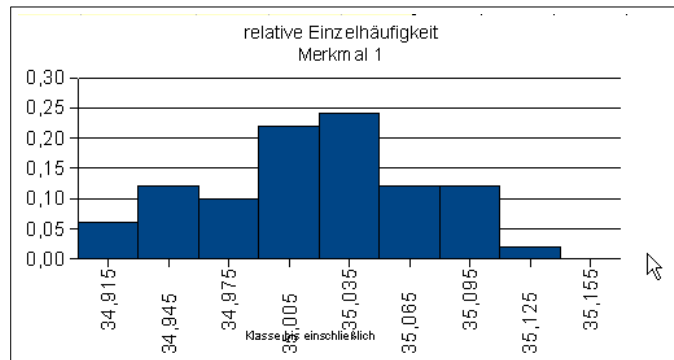
**Histogramm der relativen Summenhäufigkeiten**



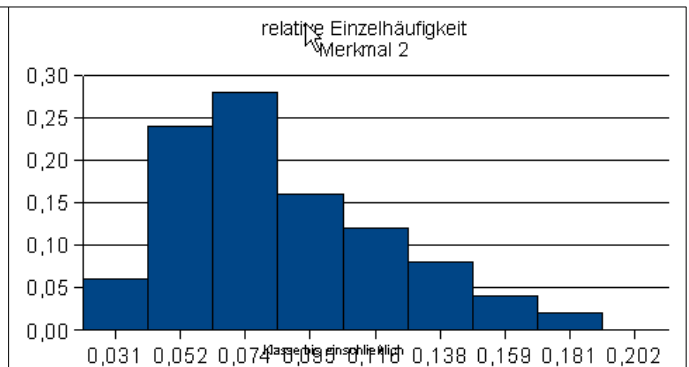




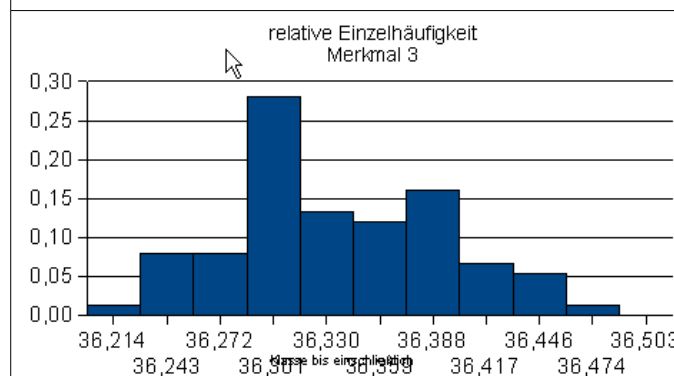
## Lösungen zu Aufg. 9b und e: Histogramm für relative Einzelklassenhäufigkeiten



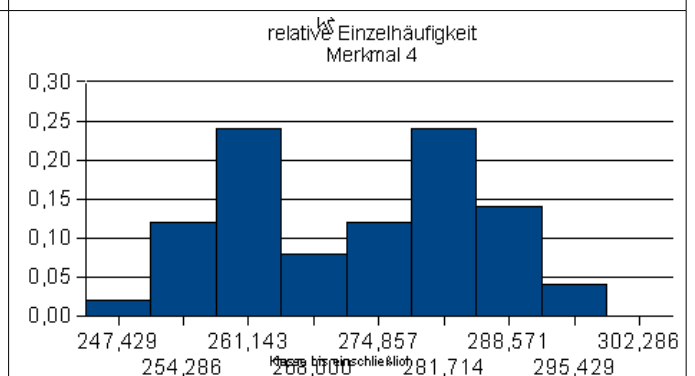
Merkmal 1 ist annähernd normalverteilt



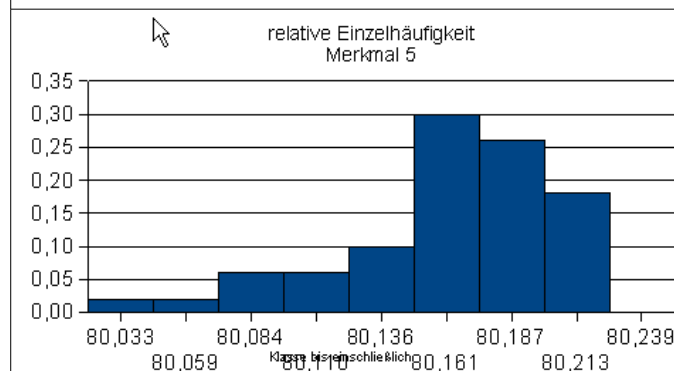
Merkmal 2 hat eine linksschiefe Verteilung. Dies ist typisch für Lagetoleranzen, Rauheiten usw., die keine negativen Werte annehmen können



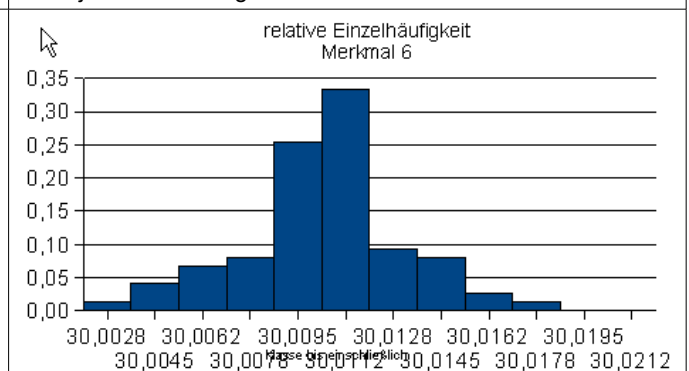
Ob Merkmal 3 normalverteilt ist, kann grafisch nicht beurteilt werden. Es wäre eine rechnerische Prüfung erforderlich.



Merkmal 4 enthält möglicherweise dass 2 verschiedene Prozesse (Anlagen, Bediener, Chargen...). Wenn möglich, sollte jeder Prozess getrennt untersucht werden.



Merkmal 5 ähnelt einer oben abgeschnittenen Normalverteilung. Möglicherweise hat der Lieferant eine 100%-Prüfung durchgeführt und die Ausschussteile aussortiert. Oder es handelt sich um eine manuelle Fertigung, bei der der Mechaniker abbricht, sobald er innerhalb der Toleranz ist.



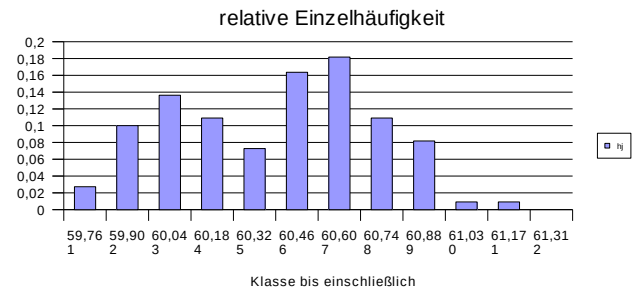
Merkmal 6 zeigt eine schöne Normalverteilung. Die Prozessfähigkeit wird allerdings nur knapp erreicht, da die Streuung für die Toleranz groß ist.



## Lösungen zu Aufg. 10 Gemischte Aufgaben

### 10.1 Anfrage

- Histogramm siehe rechts
- Mittelwert  $\mu = 60,3239 = \text{MITTELWERT}(\text{Urwerte})$
- Standardabweichung  $\sigma = 0,33283 = \text{STABW}(\text{Urwerte})$
- kritischer Prozessfähigkeitskennwert  $c_{pk} = \frac{G_o - \mu}{3 \cdot s} = \frac{62 - 60,3239}{3 \cdot 0,33283} = 1,68$
- Rechnerisch ist die Prozessfähigkeit erfüllt, da  $c_{pk} > 1,33$  ist und damit die Bedingung für 8-s erfüllt ist. Das Histogramm deutet aber darauf hin, dass 2 verschiedene Normalverteilungen vorliegen, z.B. durch 2 Materialchargen o.ä. Im Sinne der KVP sollte hier nach den Ursachen geforscht werden und diese behoben werden, um den Prozess weiter zu verbessern.
- Maschinenfähigkeit wird mit geringer Stichprobe unter Idealbedingungen untersucht und stellt fest, ob die Maschinen überhaupt die Anforderungen erfüllt. Prozessfähigkeit wird mit größerer Stückzahl unter Normalbedingungen untersucht und stellt fest, ob die Anforderungen dauerhaft im täglichen Betrieb erfüllt werden können.
- Ermittlung analog zu c) mit den für Maschinenfähigkeitsuntersuchungen abweichenden Bedingungen.  $c_{mk}$  sagt aus, ob die Maschine fähig ist, wenn die Fertigung nicht genau in der Mitte der Toleranz liegt.



### 10.2 Auftrag

- Ausschuss unterhalb der Toleranz =  $0,0000000001\% = \text{NORMVERT}(G_u; \mu; s; \text{WAHR}())$  mit  $G_u$  = unterer Toleranzgrenze  
Der Ausschuss überhalb der Toleranz =  $0,0000000120\% = 1 - \text{NORMVERT}(G_o; \mu; s; \text{WAHR}())$  mit  $G_o$  = oberer Toleranzgrenze  
Der Gesamtausschuss muss in ppm (parts per milion) umgerechnet werden:  $0,000'000'0121\% = 0,000'000'000'121 = 0,000'121$  ppm
- $c_p$  ist über 2 und genügt deshalb für 12- $\sigma$
- OEG = 60,873 HRC =  $\text{NORMINV}((1+0,99)/2; \mu; s)$  OWG = 60,688 HRC =  $\text{NORMINV}((1+0,95)/2; \mu; s)$   
UWG = 59,512 HRC =  $\text{NORMINV}((1-0,95)/2; \mu; s)$  UEG = 59,327 HRC =  $\text{NORMINV}((1-0,99)/2; \mu; s)$

Fehler: Verweis nicht gefunden

Fehler: Verweis nicht gefunden

- Regelkarten:  $\bar{x}$  - R - Karten sind nicht dargestellt.

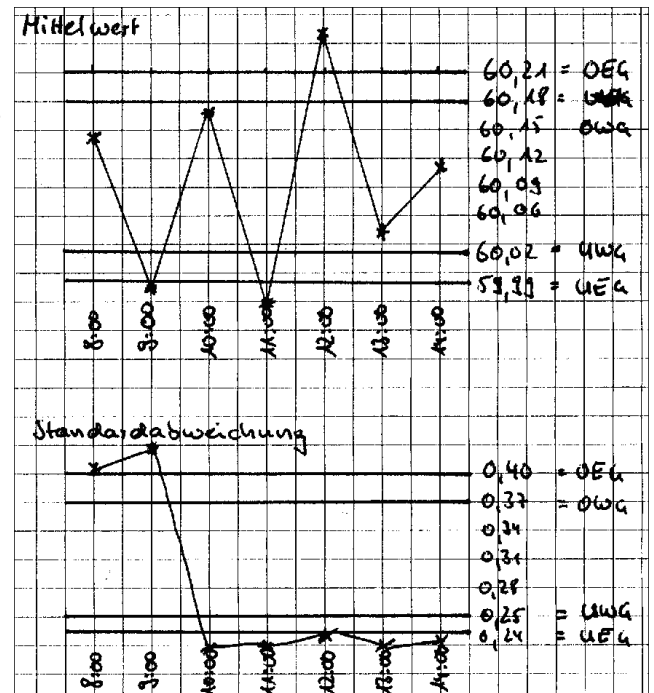
- stündliche Stichproben

- Beurteilen

Die Mittelwerte liegen mehrfach außerhalb der Eingriffsgrenzen, was jedesmal einen Stopp der Produktion bedeutet. Außerdem liegt eine Periode vor, weil die Werte abwechselnd über und unter der Mitte liegen. Dies müsste untersucht werden.

Die Standardabweichung liegt immer außerhalb der Eingriffsgrenzen, was jedes Mal einen Stopp der Produktion bedeutet.

Insgesamt lassen die Stichproben auf ziemlich Mängel in der Fertigung schließen.





## 2 Entwürfe

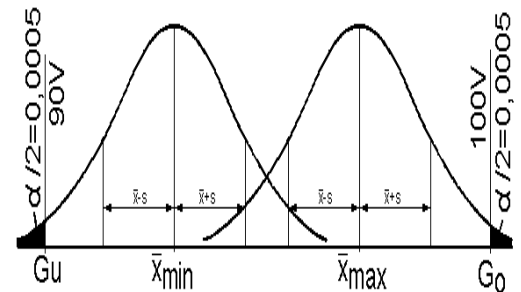
### 1 diverse

#### 1.1 Aufgabe

Die Sperrspannung einer Diode ist normalverteilt mit  $\sigma = 0,8V$ :  
Der Hersteller der Dioden kann die Standardabweichung kaum beeinflussen, wohl aber den Mittelwert.

$$\begin{array}{ll} G_{\min} & 90V \\ G_{\max} & 100V \end{array}$$

- a) In welchem Bereich muss der Mittelwert  $\bar{x}$  der Sperrspannung liegen, damit der Ausschuss durch Sperrspannungsfehler kleiner als 0,1% ist?<sup>1</sup>



#### 1.2 Anthropometrie

Gliederung der Bevölkerung nach DIN 33402-1 und DIN 33402-2 [Klein 2008] S.85. Sie suchen die Größenverteilung der Bevölkerung im Internet und finden nur folgende Angaben:

Der 50-Prozent-Mann wiegt 78kg und ist 175 cm groß.

Der 95-Prozent-Mann wiegt 101kg und ist 188 cm groß

- Wie groß ist die Standardabweichung von Gewicht und Größe bei Männern?
- dito Frauen
- Auf welcher Perzentile liegen Sie persönlich?

## 2 Histogramme im W-Netz auswerten

<sup>1</sup> zwischen 92,6V  $u_{un} = -u = \frac{90V - \bar{x}_{min}}{s} \Rightarrow \bar{x}_{min} = 90V + 3,2905 \cdot 0,8V = 92,6V$

und 97,4V  $u_{ob} = +u = \frac{100V - \bar{x}_{max}}{s} \Rightarrow \bar{x}_{max} = 100V - 3,2905 \cdot 0,8V = 97,4V$