Aufgaben

1 Einfache Wahrscheinlichkeiten P

1.1 Ein Würfel

Wie groß ist P, beim Würfeln mit einem Wurf

a) die Zahl 3 zu würfeln?

b) eine gerade Zahl zu würfeln?*

1.2 Spielsteine

In einer Packung mit 5000 Spielsteinen befinden sich 5 Ausschussteile.

a) Wie groß ist P dafür, beim Herausnehmen eines Spielsteines ein Ausschussteil zu erwischen?*

1.3 Zwei Würfel

Gesucht ist P dafür, mit zwei Würfeln

a) die Summe 7 oder

b) die Summe 4 zu würfeln.*

2 kombinierte Wahrscheinlichkeiten → W-Baum

2.1 Lackierei

Auf dem Hof einer Lackierei haben 8% der Kfz Läufer (Fall A) und unabhängig davon 10% der Kfz Farbfehler (Fall B). Mit welcher P erwischt ein Dieb im Dunkeln ein Kfz

a) mit beiden Fehlern (= A AND B)?

b) mit mindestens einem Fehler (=A OR B)?

c) nur einem der Fehler (= A XOR B)?*

2.2 Socken

Gesucht ist P dafür, aus einer Schublade mit zwei roten und drei weißen Socken in zwei Zügen zufällig zwei rote Socken zu ziehen...

a) ... ohne Zurücklegen.

b) ... mit Zurücklegen.*

2.3 Skat

Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man im Skat (2 von 22 unbekannte Karten)

a) den Kreuzbuben?

b) den Kreuz- oder den Pikbuben oder beide (OR)?

c) den Kreuz- und den Pikbuben (AND)?

d) Kreuz- oder Pikbuben, aber nicht beide (XOR)?*

2.4 Kindersegen

Ein Paar möchte Kinder. Wie groß ist P, dass sie

a) 3 Buben und 1 Mädchen bekommen?

b) erst 3 Buben und dann 1 Mädchen bekommen?

c) 4 Mädchen bekommen?*

2.5 Mensch-ärgere-dich-nicht

Wenn man beim MÄDN im Loch steckt, darf man 3 mal würfeln und muss dabei eine 6 bekommen.

a) Wie groß ist P dafür?*

2.6 Schutzumschläge

In der Schulbuchdruckerei werden auch Schutzumschläge für Schulbücher hergestellt, und zwar 60% blaue und sonst nur rote Schutzumschläge.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 3 zufällig ausgewählten Schutzumschlägen ...

a) ... höchstens 2 blau sind?

b) ... höchstens 2 rot sind?*

2.7 Schulbücher

In einer Lieferung von 23 Schulbüchern sind 5 Bücher beschädigt. Jeder Schüler der Klasse erhält ein Exemplar, das Austeilen beginnt bei Ihnen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ...

a) ... Sie ein beschädigtes Buch erhalten?

b) ... Sie und der nächste Mitschüler ein beschädigtes Buch erhalten?

c) ... Sie und einer der nächsten beiden Mitschüler (aber nicht beide) ein beschädigtes Buch erhalten?

d) ... nicht Sie, aber die nächsten beiden Mitschüler ein beschädigtes Buch erhalten?*

2.8 Lotto 6 aus 49

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ...

a) ... 6 Richtige? (Auszahlung ≈500'000 €)

b) ... 5 Richtige? (Auszahlung ≈3'000 €)

c) ... 4 Richtige? (Auszahlung ≈40 €)

d) ... 3 Richtige? (Auszahlung ≈10 €)

e) ... 5 Richtige mit Zusatzzahl (≈43'000 €)?*

3 Erwartungswert

3.1 Lotto 6 aus 49, die Zweite

a) Vergleichen Sie den Erwartungswert (durchschnittliche Auszahlung) mit dem Einsatz von ca. 1€ je Spiel.*

3.2 Eine Zockerpartie

Auf dem Tisch befinden sich sechs Felder, die mit 1, 2, 3, 4, 5 und 6 markiert sind. Die Spieler setzen, indem sie Geld in ein Feld legen. Es wird mit drei Würfeln gewürfelt. Zeigt einer der Würfel die Zahl des Feldes an, dann erhält der Spieler außer seinem Einsatz die gleiche Menge noch einmal. Zeigen zwei Würfel die Feldzahl an, dann erhält der Spieler zum Einsatz die doppelte Summe. Erscheint die Feldzahl auf allen drei Würfeln, dann gibt es Einsatz plus dreifache Summe. Zeigt jedoch keiner der Würfel die richtige Feldzahl an, dann kassiert der Spielmacher den Einsatz.

a) Wer hat die besseren Chancen, der Spielmacher oder Spieler*?

4 Bayes'sche Formel

4.1 Hepatitis-Test

Ein Hepatitis-Testverfahren erkennt 98% der Kranken richtig und stuft 1% der Gesunden als krank ein. Wie groß ist die Hoffnung, doch gesund zu sein, wenn man zufällig ausgewählt und das Testergebnis „positiv“ (=krank) lautete?

a) bei einem Anteil von 0,1% kranker Personen innerhalb der getesteten Gruppe?

b) bei einem Anteil von 10% kranker Personen innerhalb der getesteten Gruppe?*

*1.1: a) P=1/6 b) P=3/6
*1.2: a) P=5/5000
*1.3: a) P=6/36 b) P=3/36
*2.1: a) P=0,008 b) P=0,172 c) P=0,164
*2.2: a) P=1/10 b) P=4/25
*2.3: a) P= 1/11 b) P=82/462 c) P=2/462 d) P = 40/231
*2.4: a) P=1/4 b) P=1/16 c) P=1/16 Annahme: Junge/Mädchen = 50:50
*2.5: a) P=91/216
2.6: a) 78,4% b) 93,6%

*2.7: a) 5/23 b) 5/23 · 4/22 c) 6,78% d) 3,39%
*2.8: a) 1/14 Mio b) 1/54200,8 c) 1/1032,4 d) 1/56,7 e) 1/2330636
*3.1: a) E ≈ 33 Ct
*3.2: a) Der Spieler verliert pro € Einsatz ca. 8 Cent (nach [Loyd 1911])
4.1: a) 91,1% b) 8,4 % (nach [Randow 1992])

5 Große Wahrscheinlichkeits-Bäume → hypergeometrische und binomiale Verteilungen

5.1 Grenzübergang

10% der Rückreisenden am Grenzübergang Riehen schmuggeln Fleisch in die Schweiz. Die Zollbeamten kontrollieren zufällig 10 Reisende.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie ...

a) ... keinen einzigen Schmuggler finden?
b) ... genau 2 Schmuggler finden?
c) ... höchstens 2 Schmuggler finden?
d) ... mindestens 2 Schmuggler finden?
e) ... weniger als 2 Schmuggler finden?
f) ... mehr als 2 Schmuggler finden?*

5.2 DVD-Rohlinge

In einer Spindel mit 50 DVD-Rohlingen sind 10 Rohlinge fehlerhaft beschichtet. Für eine mehrteilige TV-Serie werden 8 Rohlinge benötigt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei ...

a) ... kein einziger Rohling defekt ist?
b) ... genau 3 Rohlinge defekt sind?
c) ... höchstens 3 Rohlinge defekt sind?
d) ... mindestens 3 Rohlinge defekt sind?
e) ... weniger als 3 Rohlinge defekt sind?
f) ... mehr als 3 Rohlinge defekt sind?*

5.3 Schrauben

Eine Lieferung von 10 000 Schrauben enthalte:

- 57 Schrauben mit Gewindefehlern
- 152 Schrauben mit zu niedriger Festigkeit
- 85 Schrauben mit Oberflächenfehlern.

Mit je 4 dieser Schrauben sollen Baugruppen montiert werden.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ...

a) ... die nächste Schraube wegen eines Gewindefehlers nicht montiert werden kann?
b) ... eine Lieferung zurückgewiesen wird, weil in einer Stichprobe mit Zurücklegen (Stichprobenumfang n = 100) höchstens 2 Schrauben mit Oberflächenfehler auftreten dürfen?
c) ... sich unter den 4 Schrauben einer Baugruppe mindestens eine Schraube mit zu geringer Festigkeit befindet?
d) ... unter den 4 Schrauben einer Baugruppe genau eine Schraube mit zu geringer Festigkeit ist?*

5.4 Roulette

Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt man im Roulette, wenn man auf immer nur auf "impair" setzt?

Hinweis: "impair" = "ungerade" gewinnt, wenn von den Zahlen 0 bis 36 eine ungerade Zahl fällt. Insgesamt gewinnt man, wenn man mehr Spiele gewinnt als verliert ...

a) ... bei 3 Spielen
b) ... bei 10 Spielen*

5.5 Lotto 6 aus 45 (Österreich)

Wie groß ist, unabhängig von der Zusatzzahl. die Wahrscheinlichkeit für ...

a) ... 6 Richtige? (Auszahlung ≈1,7 Mio €)
b) ... 5 Richtige? (Auszahlung ≈2150 €)
c) ... 4 Richtige? (Auszahlung ≈50 €)
d) ... 3 Richtige? (Auszahlung ≈5 €)
e) Wie hoch ist der Erwartungswert für die Auszahlung?*

5.6 n-c-Anweisungen

... werden meist nach AQL-Listen vereinbart.

a) Wie groß sind die Annahmewahrscheinlichkeiten bei Stichproben nach AQL 0,15 – normale Prüfung – Prüfniveau II – Losgröße 1000 abhängig vom Fehleranteil (0 ... 1%)?
Stellen Sie die Annahmewahrscheinlichkeiten grafisch dar.
b) Die n-c-Anweisungen von AQL 0,15 sind so ausgelegt, dass ein Los mit 0,15% Fehlern eine Annahmewahrscheinlichkeit von etwa 90% hat. Tragen Sie Lieferanten- und Kundenrisiko ein.
c) Welche Vor- und Nachteile haben die verschiedenen Anweisungen?
d) Wie können Sie sich als Lieferant verhalten, wenn Ihr Los zwar zurückgewiesen wurde, Sie aber auf Grund Ihrer Prozesskontrollen annehmen können, dass Ihr Los nur einen Fehleranteil von 0,05% hat?*

5.7 Festplatten

Ein Computerschrauber vereinbart mit seinem Festplatten-Lieferanten eine Stichprobenanweisung 100-2 (n-c-Anweisung).

Aus einer Fertigung mit 1,5% Fehlern wird ein Los aus 2000 Festplatten geliefert und getestet.

a) Wie groß ist die Annahmewahrscheinlichkeit?
b) Wie groß ist die Rückweisewahrscheinlichkeit?
c) Stellen Sie die Annahme- und Rückweisewahrscheinlichkeit abhängig vom Fehleranteil (0 ... 10%) dar.*

5.8 Großhandelskette

Eine Großhandelskette verlangt von ihren Lieferanten einen Fehleranteil von max. 0,25% und prüft dies durch Einfach-Stichprobenanweisungen (n-c-Anweisung) nach AQL.

a) Beschreiben Sie den Ablauf einer solchen Prüfung, wenn eine 1000 Stück einer Ware geliefert werden.
b) Wie groß ist das Lieferantenrisiko, wenn die Ware tatsächlich 0,2% Ausschuss enthält?
c) Wie groß ist das Kundenrisiko, wenn die Ware tatsächlich 0,3% Ausschuss enthält?
d) Wie ändern sich die Stichprobenanweisungen, wenn Lieferungen mehrmals hintereinander zurückgewiesen werden?*

---

* 5.1: a) 34,87% b) 19,37% c) 92,98% d) 26,39% e) 73,61% f) 7,02%
(Alle Zahlen sind natürlich fiktiv.)
* 5.2: a) 14,32% b) 14,71% c) 95,93% d) 18,78% e) 81,22% f) 4,07%
* 5.3: a) 0,57% b) 5,41% c) 5,94% d) 5,81%
* 5.4: a) 47,97% b) 34,42%
* 5.5: a) ≈ 1/8,1 Mio b) 1/34808 c) 1/732,8 d) 1/44,6 e) 45 Ct
* 5.6: siehe Arbeitsblatt zu AQL
* 5.7: a) 80,98% b) 19,02% c) siehe Arbeitsblatt zu AQL
n-c-Anweisung 100-2 bedeutet, dass aus einem Los eine Stichprobe von 100 Teilen geprüft wird und davon maximal 2 Teile fehlerhaft sein dürfen.
* 5.8: KA 2004/05

6 Übungen kreuz und quer

6.1 Glühlampen

Ein Elektrofachhändlerin erhält eine Lieferung von 100 Glühlampen, davon sind 8 fehlerhaft. Die Fachhändlerin prüft 12 Glühlampen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie ...

a) ... keine einzige defekte Lampe findet?
b) ... genau 3 defekte Lampen findet?
c) ... höchstens 3 defekte Lampen findet?
d) ... mindestens 3 defekte Lampen findet?
e) ... weniger als 3 defekte Lampen findet?
f) ... mehr als 3 defekte Lampen findet?*

6.2 Kartenspiel

Sie ziehen verdeckt 8 Karten aus einem Kartenspiel mit 32 Karten (zur Hälfte rot oder schwarz bzw. zu einem Viertel Kreuz, Pik, Herz oder Karo). Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten Sie ...*

a) ... nur schwarze Karten?
b) ... nur Herz-Karten?
c) ... je 4 schwarze und rote Karten?

6.3 Widerstände

Erfahrungsgemäß sind 5% aller Widerstände fehlerhaft. Ein Hobbyelektroniker, der 2 Freundinnen und 3 Katzen hat, kauft 4 Widerstände und überprüft sie zu Hause auf ihre Funktionsfähigkeit.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ...

a) ... mindestens eines der 4 Bauteile nicht i.O.?
b) ... genau eines der 4 Bauteile nicht i.O.?*

6.4 Leuchten

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einer Lieferung von 1000 Leuchten , davon 30 fehlerhaft, bei einer Stichprobe von 10 genau 0, 1, 2, 3 usw. fehlerhafte Leuchten zu finden, wenn ...

a) ... alle Leuchten auf einmal entnommen werden und dann geprüft werden?
b) ... die Leuchten einzeln entnommen, geprüft und wieder untergemischt werden?
c) Vergleichen Sie die Situation bei einer Stichprobengröße n = 100?*

6.5 Knöpfe

Ein Kurzwarenhändler erhält 2000 Knöpfe, von denen der Lieferant weiß, dass sie 5% Ausschuss enthalten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Annahme verweigert, wenn der Kunde ...

a) ... der Sendung zufällig 50 Knöpfe entnimmt und untersucht und bei mehr als 3 beanstandeten Knöpfen die Annahme der Lieferung verweigert?
b) ... 100 Knöpfe prüft und bei mehr als 7 Beanstandungen zurückweist?*

6.6 Schutzumschläge

In der Schulbuchdruckerei werden auch Schutzumschläge für Schulbücher hergestellt, und zwar 40% rote und sonst nur blaue Schutzumschläge.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 4 zufällig ausgewählten Schutzumschlägen höchstens 2 rot sind?*

*
*6.1: a) 34,54% b) 4,63% c) 99,33% d) 5,30% e) 94,70% f) 0,67%
*6.2: a) 0,0012236 b) 9,5072E-08 c) 0,315
*6.3: a) 0,18549 b) 0,171
6.4: a) 73,64% 22,99% 3,12% 0,24% ...
b) 73,74% 22,81% 3,17% 0,26%
c) Bei größerem Stichprobenumfang werden die Abweichungen größer.
*
*6.5: a) 0,23959 b) 0,233399
6.6: a) 82,08%

6.7 Schrauben

In 10000 Schrauben seien enthalten:
57 Schrauben mit Gewindefehlern
152 Schrauben mit zu niedriger Festigkeit
85 Schrauben mit Oberflächenfehlern.
Mit je 4 dieser Schrauben werden Baugruppen montiert.* Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ...

a) ... für jede einzelne Schraube, dass sie wegen eines Gewindefehlers nicht montiert werden kann?
b) ... für die Zurückweisung wegen 3 oder mehr Schrauben mit fehlerhafter Oberfläche, wenn zur Prüfung der Oberfläche nacheinander 100 Schrauben zufällig aus der Lieferung entnommen, einer Sichtprobe unterzogen, sofort zurückgeworfen und untergemischt werden?
c) ..., dass sich unter den 4 Schrauben einer Baugruppe mindestens eine Schraube mit zu geringer Festigkeit befindet?
d) ..., dass sich unter den 4 Schrauben einer Baugruppe genau eine Schraube mit zu geringer Festigkeit befindet?

6.8 Fan-Artikel

Bei einer Benefiz-Veranstaltung des SC Freiburg sollen Bälle verschenkt werden, darunter 70% Jugendbälle.

a) Der Trainer entnimmt zufällig 10 Bälle aus dem großen Container. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind es 6 oder mehr Jugendbälle?
b) Tatsächlich hat der Trainer 7 Jugendbälle und 3 normale Bälle erwischt. Er verteilt sie wahllos an eine Gruppe Jugendlicher, darunter 3 Mädchen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommen die 3 Mädchen normale Bälle, wenn jede von ihnen genau einen Ball erhält?
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit steigt der SC Freiburg in dieser Saison ab?*

6.9 Schulbücher

In einer Lieferung von 23 Schulbüchern sind 5 Bücher beschädigt. Jeder Schüler der Klasse erhält ein Exemplar, das Austeilen beginnt bei Ihnen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ...

a) ... Sie ein beschädigtes Buch erhalten?
b) ... Sie und der nächste Mitschüler ein beschädigtes Buch erhalten?
c) ... Sie und einer der nächsten beiden Mitschüler (aber nicht beide) ein beschädigtes Buch erhalten?*

6.10 Multiple-Choice-Aufgaben

Multiple-Choice-Aufgaben sind unter Lehrern beliebt, weil sie schnell korrigiert sind. Es werden 25 Aufgaben gestellt mit je 5 Auswahlmöglichkeiten. Ein Schüler hat keine Ahnung und kreuzt die Antworten völlig zufällig an.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Schüler

a) ... die 6. Aufgabe richtig löst?
b) ... eine 4,0 oder besser erhält, für die 13 richtige Antworten nötig sind?
c) ... genau die 5 richtigen Antworten erreicht, die man mit zufälligen Antworten erwarten kann?*

*
*6.7: a) 0,0057 b) 0,054119 c) 0,059437 d) 0,0580865
*6.8: a) 84,97% b) 0,83% c) wird nicht gewertet.
*6.9: a) 0,217 b) 0,0395 c) 0,0678
6.10: a) 0,20 b) 0,0369 c) 0,196

6.11 Lotto 3 aus 24

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ...

a) ... für 3 Richtige

b) ... für 2 Richtige*

6.12 Schuldenkrise

Die Wahrscheinlichkeit, dass Griechenland pleite geht, sei 30%. Wenn dies geschieht, wird eine franz. Großbank mit einer Wahrscheinlichkeit von 55% mit in den Abgrund gezogen. Wenn Griechenland saniert werden kann, beträgt die Überlebenswahrscheinlichkeit für die frz. Großbank 90%.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ...

a) ... Griechenland und die frz. Bank pleite gehen?

b) ... die frz. Großbank pleite geht?

c) ... die frz. Großbank pleite geht, obwohl Griechenland saniert wurde?

d) Das BMF kalkuliere bei einer Pleite von Griechenland mit Lasten für Deutschland in Höhe von 150 Mrd €, bei der Pleite einer frz. Großbank mit 350 Mrd €.

Wie groß ist der Erwartungswert für die Lasten?*

6.13 FC Q-Dorf

Vom Fußballclub FC Q-Dorf ist bekannt, dass er eine von 10 seiner Angriffsaktionen erfolgreich mit einem Tor abschließt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ...

a) ... der 3. Angriff erfolgreich ist?

b) ... Q-Dorf mit 15 Angriffsaktionen gewinnt, wenn der Gegner 2 Tore schießt?

c) ... Q-Dorf mit 20 Angriffsaktionen ein Unentschieden erreicht, obwohl der Gegner nur ein Tor erzielt?*

6.14 Lotto 7 aus 36

Beim Lotto in Dänemark werden 7 Kreuze auf dem Tippzettel gemacht und dann 7 aus 36 Kugeln gezogen.

a) Wie groß ist in Dänemark die Wahrscheinlichkeit auf 5 Richtige?*

6.15 Computersaal

In einem Computersaal mit 15 Computern treten mehrere Fehler zufällig und unabhängig voneinander auf, d.h., ein PC kann auch mehrere Fehler haben. Es sind:

– An 3 PCs kann man sich nicht anmelden (Fehler A)
– 7 PC enthalten Viren (Fehler V)
– Durchschnittlich 5 PC verlieren im Lauf der Sitzung den Kontakt zu H:/ (Fehler H).

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ...

a) ... ein PC keinen Fehler hat?

b) ... ein PC Fehler A UND H trägt?

c) ... ein PC Fehler A ODER H trägt?

d) ... drei Schüler zufällig je einen PC ohne Fehler H erwischen?*

6.16 Lotto 7 aus 35

In Schweden werden 7 Kreuze auf dem Tippzettel gemacht und dann 7 aus 35 Kugeln gezogen.

*6.11: a) 0,094% b) 3,11%
*6.12: a) 16,5% b) 23,5% c) 7% d) 127,25 Mrd €
*6.13: a) 10% b) 18,41% c) 27,2%
*6.14: a) 0,102%
*6.15: a) 28,4% b) 6,67% c) 46,7% d) 26,37%

a) Wie groß ist dort die Wahrscheinlichkeit auf 5 Richtige?[*]

6.17 Bankentest 1

Im Dezember 2009 hat die Stiftung Warentest die Beratung von 21 Banken getestet und die folgenden Bewertungen vergeben: 3x befriedigend, 16x ausreichend, 2x mangelhaft. Wie groß war für die Mitarbeiter der Stiftung Warentest die Wahrscheinlichkeit ...

a) ... genau 5 ausreichende (nix anderes) Banken unter den ersten 8 getesten zu finden?
b) ... 5 oder mehr ausreichende (nix anderes) Banken unter den ersten 8 getesteten zu finden?
c) ... eine gute Bank unter den ersten 8 getesten zu finden?[*]

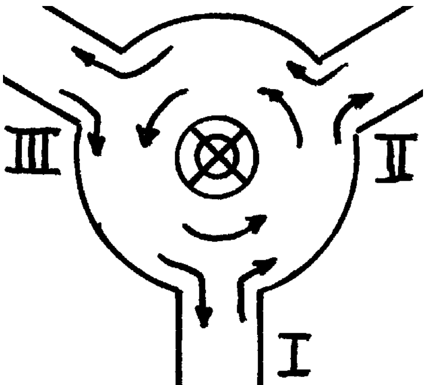
6.18 Bankentest 2

Wenn man das Ergebnis des Bankentestes verallgemeinert, ergeben sich für Deutschland die folgenden, etwas vereinfachten Zahlen: 15% der Banken sind befriedigend, 10% sind mangelhaft, der Rest ist ausreichend.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den 13 Banken in Lörrach ...

a) ... genau 5 befriedigende Banken befinden?
b) ... mehr als die Hälfte mit mangelhaft befinden?[*]

6.19 Kreisverkehr

Zu einem Kreisverkehr führen die 3 Straßen I, II und III. Eine Zählung ergibt:



Zufahrt	Zufahrts-anteil	Ausfahrt I	Ausfahrt II	Ausfahrt III
I	25%		40%	60%
II	60%	20%		80%
III	15%	30%	70%	

Lesebeispiel: Über die Straße III fahren 15% aller Fahrzeuge in den Kreisverkehr hinein, davon verlassen ihn zu 30% über die Straße I.

Wie viel Prozent ...

a) ... aller Fahrzeuge fahren bei I in den Kreisel und bei III hinaus?
b) ... aller Fahrzeuge verlassen den Kreisel bei III?
c) ... der Fahrzeuge, die den Kreisel bei III verlassen, sind bei II eingefahren?
d) ... aller Fahrzeuge fahren auf dem Kreiselsegment zwischen I und II?[*]

[*] 6.16: a) 0,118%
[*] 6.17: a) 21,47% b) 95,25% c) 0
[*] 6.18: a) 2,663% b) 0,0099%
[*] 6.19: a) 15% b) 63% c) 76,2% 35,5%

6.20 Weihnachtsmann 1

Der Weihnachtsmann packt seinen rosa Sack mit 37 roten und 51 gelben Paketen, schwingt sich in sein Elkomobil und macht sich auf seine Auslieferungstour. Entgegen landläufiger Ansichten werden die Päckchen nicht nach Bestellung, sondern zufällig verteilt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ...

a) ... ist seine erste Lieferung ein gelbes Paket?
b) ... sind 3 der ersten 5 Pakete gelb?
c) ... sind höchstens 7 der ersten 20 Pakete gelb?
d) ... sind die letzten 3 Pakete alle gelb?... sind mehr als 5 der ersten 12 Pakete gelb?*

6.21 Weihnachtsmann 2

Der Weihnachtsmann wird auch immer älter und lässt in diesem Jahr seine Säcke vom himmlischen Personal packen. Es gibt große und kleine Pakete, die in farbige Säcke gepackt werden.

Sackfarbe	***Zielgruppe***	***Anteil der Pakete***	***darunter kleine Pakete***
weiß	Erwachsene	60%	80%
rosa	Mädchen	18%	40%
hellblau	Buben	22%	70%

Glühweinbedingt blickt der Weihnachtsmann das System nicht und gibt die Pakete völlig zufällig aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

a) ... greift er ein kleines Paket aus dem rosa Sack?
b) ... greift er ein großes Paket (beliebiger Sack)?
c) ... greift er ein großes Paket, wenn er erst den weißen Sack geleert hat und jetzt zum ersten Mal in einen farbigen Sack greift?
d) Als der Weihnachtsmann zur Basisstation zurückommt, sind im blauen Sack noch 20 Pakete übrig. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich darunter mehr als 5 kleine Pakete befinden?*

6.22 Noten-Würfel

Die Sonne lacht, korrigieren ist langweilig, der Lehrer tut, was Sie immer wussten: Er greift zum Würfel. Ihre Klasse habe 19 Schüler, es gibt nur ganze Noten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ...

a) ... bekommen Sie eine 3?
b) ... ist Ihre Note schlechter als 3?
c) ... bekommen genau 3 Schüler der Klasse eine 3?
d) ... bekommen weniger als 3 Schüler Ihrer Klasse eine 3?
e) ... gibt es in Ihrer Klasse keine einzige 6?*

6.23 A5

10% der Autos, die auf der A5 Richtung Norden fahren, sind rot, 40% sind silbern. Bei Neuenburg fahren 20% der Fahrzeuge nach Frankreich. Bis Karlsruhe haben 35% die Autobahn verlassen, in Karlsruhe fahren 65% Richtung Stuttgart, der Rest Richtung Mannheim.

a) Wie viele Prozent aller Autos fahren über Karlsruhe?
b) Wie viele Prozent aller roten Autos fahren Richtung Stuttgart?
c) Wo kommen all die Autos her?*

6.24 Abwrackprämie

Ein französischer Kleinwagenhersteller kann als Nutznießer der Abwrackprämie seine Produktion steigern und will bei einem regionalen Lieferanten Befestigungsclips bestellen. Vor der Vertragsunterzeichnung muss geklärt sein, wie die Clips geprüft werden. Zur Diskussion stehen Einfach-Stichprobenanweisungen (n-c-Anweisung) nach AQL.

a) Beschreiben Sie kurz, unter welchen Voraussetzungen solche Prüfungen nach AQL sinnvoll sind und welchen Vorteil sie bieten.
b) Die Bestellung ist erfolgt mit AQL 1,0 normal für Merkmal x. Erklären Sie, in welchem Umfang die erste Lieferung mit einer Stückzahl von 400 Stück geprüft wird und welche Bedingung erfüllt sein muss.
c) Wie groß ist die Rückweisewahrscheinlichkeit, wenn die Ware tatsächlich 0,8% Ausschuss enthält?
d) Wie groß ist das Annahmewahrscheinlichkeit, wenn die Ware tatsächlich 1,3% Ausschuss enthält?
e) Erklären Sie den Begriff Kundenrisiko.
f) Welchen Zweck haben verschärfte und reduzierte Prüfungen?*

6.25 Milchtüten Regal

Eine Hilfskraft räumt Milchtüten völlig durcheinander ins Kühlregal. Bei der fettarmen Milch (40% der Tüten) sind 10% älteren Datums, von halbfetter Milch (40%) sind es 20% und bei Vollmilch (20%) sind es 30%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ...

a) ... eine beliebige Tüte ältere Milch enthält?
b) ... eine beliebige Tüte frische fettarme Milch enthält?
c) ... ein Testkäufer, der nur Milch älteren Datums sucht, zuerst keine Vollmilch erwischt?*

6.26 Milchtüten Füllung

Die Milchtüten werden mit einer Füllmenge von durchschnittlich 1,0 l und der Standardabweichung 0,015 l ausgeliefert und von einem Großkunden mit Einfach-Stichprobenanweisungen (n-c-Anweisung) nach AQL geprüft.

Wie groß ist ...

a) … der Ausschussanteil bei den Milchtüten?
b) … das Kundenrisiko, wenn die Ware tatsächlich 0,1% Ausschuss enthält und mit n-c 315-0 geprüft wird?*

6.27 Gewitter

Bei einem Gewitter werden in 40% der Häuser Fernseher, PCs usw. durch Überspannung zerstört. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ...

a) ... kommt das 5. Haus davon?
b) ... werden in 5 der ersten 10 Häuser Geräte beschädigt?
c) ... kommt es in höchstens 3 der ersten 5 Häuser zu Schäden?
d) ... kommt es in allen den Häusern 3 bis 8 zu Schäden?

* 6.20: a) 57,95% b) 35,4% c) 1,76% d) 18,98% e) 82,0%
* 6.21: a) 7,2% b) 29,4% c) 43,5% d) fehlt
* 6.22: a) 1/6 b) 50% c) 24,26% d) 36,43% e) 3,13%
6.23: fehlt

* 6.24: a) s.u. b) 50-1 c) 9,52% d) 86,05% e, f) fehlen
* 6.25: a) 18% b) 36% c) 66,7%
6.26: a) 0,0858% b) 72,97%

e) ... wird im ersten Haus ein elektrisches Gerät beschädigt?*

6.28 Erdgas-Pipeline

Für den Bau einer Erdgas-Pipeline werden 420 Rohre geliefert. Vereinbart ist eine Prüfung mittels Einfachstichprobenanweisung.

a) Schlagen Sie eine Einfach-Stichprobenanweisungen (n-c-Anweisung) nach AQL (Prüfniveau II, normale Prüfung, zulässiger Fehleranteil 0,15%), und erläutern Sie die Prüfung nach dieser Anweisung.
b) Welchen Unterschied würde es machen, wenn man die Einfachstichprobenanweisung für eine Lieferung von 200 Rohren auswählen und durchführen würde?
c) Wie groß wäre das Lieferantenrisiko, wenn tatsächlich 0,15% Ausschussanteil geliefert werden?
d) Wie groß ist das Kundenrisiko, wenn tatsächlich 0,2% Ausschussanteil geliefert werden?*

6.29 Musterpolitiker MP

Musterpolitiker MP tritt mit durchschnittlich 30% seiner Aussprüche in irgendein Fettnäpfchen. Im Sommerloch will er sich zurückhalten und nur 8 Aussprüche tun.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ...

a) ... führt schon der erste Ausspruch MPs ins Fettnäpfchen?
b) ... tritt MP im Sommerloch in genau 3 Fettnäpfchen?
c) ... kommt MP mit höchstens 2 Fettnäpfchen durch das Sommerloch?
d) ... wird MP im Sommerloch von seiner Partei fallen gelassen, weil er mindestens 5 mal in Fettnäpfchen tritt?
e) ... führt erst der letzte der Sommerlochsprüche ins Fettnäpfchen?*

6.30 Fruchtgummi

Ein Großkunde verlangt beim Füllgewicht der Fruchtgummi-Tüten einen Fehleranteil von max. 0,25% und prüft dies durch Einfach-Stichprobenanweisungen (n-c-Anweisung) nach AQL.

a) Beschreiben Sie den Ablauf einer solchen Prüfung, wenn 1000 Tüten geliefert werden.
b) Wie groß ist das Lieferantenrisiko, wenn die Ware tatsächlich 0,2% Ausschuss enthält?
c) Wie groß ist das Kundenrisiko, wenn die Ware tatsächlich 0,3% Ausschuss enthält?
d) Welchen Zweck haben verschärfte und reduzierte Prüfungen?*

6.31 Fußball

Die Nationalmannschaft von Skorgolia verwertet normalerweise 3 von 10 Torchancen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ...

a) ... führt die erste Torchance zum Tor?
b) ... schießen sie genau 2 Tore mit 4 Torchancen?
c) ... gewinnen sie ein Spiel mit 7 Torchancen, nachdem sie selbst 2 Tore kassiert haben?
d) ... schießen sie mit 12 Torchancen weniger als 4 Tore?
e) ... führt erst die letzte von 7 Torchancen zum Tor?*

6.32 Fußbälle

Ein Importeur von Fußbällen verlangt von seinem pakistanischen Lieferanten einen Fehleranteil von max. 1% und prüft dies durch Einfach-Stichprobenanweisungen (n-c-Anweisung) nach AQL.

a) Beschreiben Sie den Ablauf einer solchen Prüfung, wenn 500 Bälle geliefert werden.
b) Wie groß ist das Lieferantenrisiko, wenn die Ware tatsächlich 0,8% Ausschuss enthält?
c) Wie groß ist das Kundenrisiko, wenn die Ware tatsächlich 1,3% Ausschuss enthält?
d) Erklären Sie, durch welche Verfahren die Anzahl der Stichproben weiter reduziert werden kann.*

6.33 Drehtür

Aus der Drehtür eines Geschäftes kommen die Menschen einzeln heraus. Im Durchschnitt sind es 35% Frauen und 65% Männer. In der folgenden Tabelle steht, wie viel Geld die Personen in dem Geschäft ausgegeben haben.

	unter 10 €	***10 ... 100 €***	***über 100€***
Frauen	20%	65%	15%
Männer	25%	40%	35%

Mit welcher Wahrscheinlichkeit …

a) … ist die erste Person ein Mann?
b) ... kommen erst 3 Frauen und dann 3 Männer?
c) ... sind unter 10 Personen weniger als 6 Frauen?
d) ... sind genau 3 der 10 Personen Männer?
e) … ist die nächste Person ein Mann, der über 100€ ausgab?
f) … hat die nächste Person für weniger als 10€ eingekauft?*

6.34 Losbude

Bei einem Straßenfest erstehen Sie in einer Losbude 6 Lose. Der Verkäufer garantiert, dass 35% aller Lose gewinnen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ...

a) ... gewinnt gleich das erste Los, das Sie öffnen?
b) ... sind die ersten beiden Lose, die Sie öffnen, eine Niete und die nächsten drei Lose jeweils ein Gewinn?
c) ... sind unter den Losen genau 3 Gewinnlose?
d) ... gewinnen mindestens 2 der Lose?*

6.35 Lebensmittelkonserven

Bei einer unabhängigen Untersuchung von 320 Produkten (Lebensmittelkonserven) wurde festgestellt, dass 25 von ihnen genbehandelte Zusatzstoffe enthalten. Nehmen Sie an, dass ein Kunde wahllos aus dieser Produktpalette einkauft.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält/enthalten...

a) ... die erste Konserve genbehandelte Zutaten?
b) ... mindestens 1 der ersten 10 Konserven genbehandelte Zutaten?
c) ... die ersten 20 Konserven <u>keine</u> genbehandelten Zutaten?
d) ... von 5 Konserven höchstens 1 genbehandelte Zutaten?*

*6.27: a) 60% b) 20,07% c) 91,30% d) 0,41% e) 40%
*6.28: a) 80-0 b) s.u. c) 11,32% d) 85,20%
*6.29: a) 30% b) 25,41% c) 55,18% d) 5,80% e) 2,47%
*6.30: a) 50-0 b) 9,52% c) 86,05% d) s.u.
6.31: a) 30% b) 26,46% c) 35,29% d) 49,25% e) 3,53%

*6.32: a) 50-1 b) 6,09% c) 86,22% d) s.u.
*6.33: a) 65% b) 2,79% c) 90,51% d) 2,12% e) 22,75%
*6.34: a) 35% b) 1,81% c) 23,55% d) 68,09%
6.35: a) 7,81% b) 56,20% c) 18,65% d) 94,93%

6.36 Ravioli

Ein Hersteller von Ravioli hat festgestellt, dass die folgenden Lieferungen genmanipuliert sind

- 2,5% des Mehls (z.B. mit Resistenzgenen gegen Mehlfäule)
- 5 % des Fleisches (z.B. mit Akzeptanzgenen für die Anabolikamast)
- 3 % der Tomaten (z.B. mit Frostschutzgenen von Nordseeflundern)

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ...

a) … enthält ein Los Ravioli, das aus nur je einer Lieferung Mehl, Fleisch und Tomaten hergestellt wurde wird, genmanipulierte Anteile?

b) … sind die beiden pflanzlichen Bestandteile gemeinsam betroffen?*

6.37 Schweinhälften

Um unter der deklarationspflichtigen Grenze zu bleiben, vereinbart ein Hersteller von fleischhaltigen Produkten mit seinen Lieferanten, dass höchstens 1,5% der gelieferten Schweinehälften aus genmanipulierten Beständen stammen dürfen. Die Lieferungen werden per n-c-Anweisungen kontrolliert.

a) Schlagen Sie eine Einfach-Stichprobenanweisungen (n-c-Anweisung) nach AQL (Prüfniveau II, normal) für Lieferungen von wöchentlich 400 Schweinehälften, und erläutern Sie die Prüfung nach dieser Anweisung.

b) Erläutern Sie die Begriffe Kunden- und Lieferantenrisiko.

c) Wer hat das Risiko, wenn tatsächlich 1,3% Ausschussanteil geliefert werden, und wie groß ist es?

d) Welche Vor- und Nachteile hätte eine Prüfung mit größeren Umfang, z.B. n-c 80-3?*

6.38 DVD-Laufwerke

Ein Computerdistributor vergibt einen Großauftrag für DVD-Laufwerke an einen taiwanesischen Lieferanten.

a) Schlagen Sie eine Einfach-Stichprobenanweisungen (n-c-Anweisung) nach AQL (normal, Prüfniveau II, Lieferungen von je 400 Teilen, zulässiger Fehleranteil 0,25%), und erläutern Sie die Prüfung nach dieser Anweisung.

b) Wie groß ist das Lieferantenrisiko, wenn tatsächlich 0,2% Ausschussanteil geliefert werden?

c) Wie groß ist das Kundenrisiko, wenn tatsächlich 0,3% Ausschussanteil geliefert werden?*

6.39 Joghurtregal

Das Kontrollteam einer großen Einzelhandelskette stellt in einer Filiale fest, dass im Regal 190 Joghurt angeboten wurden und davon bei 12 Joghurt das Verfallsdatum überschritten ist.

Nehmen Sie an, dass unser Kunde die Joghurts ohne Kontrolle des Verfallsdatums einkauft.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ...

a) … ist gleich beim ersten Joghurt das Verfallsdatum überschritten?

b) … sind die ersten 5 Joghurt in Ordnung?

c) … sind unter 10 Joghurts genau 3 abgelaufen?

d) … sind unter 8 Joghurts maximal 2 abgelaufen?*

6.40 Joghurt

Um sicherzustellen, dass die Joghurts frisch genug angeliefert werden, wird der Vertrag mit den Lieferanten dahingehend geändert, dass höchstens 1% der gelieferten Ware näher als 7 Tage am Verfallsdatum sein dürfen. Die Lieferungen sollen per n-c-Anweisung kontrolliert werden.

a) Schlagen Sie eine Einfach-Stichprobenanweisungen (n-c-Anweisung) nach AQL (Prüfniveau II, normal) für Lieferungen von 1200 Joghurts, und erläutern Sie die Prüfung nach dieser Anweisung.

b) Wie groß ist das Lieferantenrisiko, wenn tatsächlich 0,7% Ausschussanteil geliefert werden?

c) Wie groß ist das Kundenrisiko, wenn tatsächlich 1,3% Ausschussanteil geliefert werden?

d) Welche Vor- und Nachteile hätte eine Prüfung mit kleinerem Umfang, z.B. n-c 13-0?*

6.41 Verlostes Casting

Die Einzelhandelskette verlost unter ihren jugendlichen Kunden einige Plätze beim Casting für eine Seifenoper eines großen Privatsenders. Bei der ersten Verlosung gewinnen 1% der Teilnehmer einen Casting-Platz. In der zweiten Verlosung bekommen die Verlierer noch eine Chance: 0,5% gewinnen einen Casting-Platz und 10% den Trostpreis von 25€.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für jeden Teilnehmer der Verlosung, am Casting teilzunehmen?

b) Wie viel Euro kostet das Unternehmen der Spaß, wenn 1000 Kunden teilnehmen und die Kosten für ein Casting durchschnittlich 200€ betragen?*

6.42 Tiermehl

Bei einer Überprüfung von deutschen Futtermitteln durch EU-Behörden wurden 130 Proben genommen. Davon werden in 39 Proben Tiermehl gefunden. Von den Proben wurden 5 Stück vom Institut Thegenius untersucht.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ...

a) ... für jede einzelne Probe, dass sie Tiermehl enthält?

b) ..., dass im Institut Thegenius keine Proben mit Tiermehl gefunden wurden?*

6.43 Futtermittel

Im Weiteren ist davon auszugehen, dass durchschnittlich 53% aller deutschen Futtermittellieferungen Tiermehl enthalten.

Ein deutsches Bundesland lässt bei 11 Lieferungen je eine Stichprobe nehmen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ...

a) ... gar kein Tiermehl gefunden wird?

b) ..., 6 oder mehr Proben mit Tiermehl gefunden wurden?

c) ..., bis zu 8 Proben mit Tiermehl gefunden werden?

d) ... zwischen 7 und 10 Proben (jeweils einschließlich) mit Tiermehl gefunden wurden?*

* 6.36: a) 10,15% b) 0,075%
* 6.37: a) 50-2 b) s.u. c) 97,3% d) s.u.
* 6.38: a) 50-2 b) 9,53% c) 86,05%
6.39: a) 6,32% b) 71,91% c) 1,65% d) 99,09%

* 6.40: a) 80-2 b) 1,89% c) 91,34% d) s.u.
* 6.41: a) 1,5% b) 5,465 €
* 6.42: a) 30% b) 16,25%
6.43: a) 0,0247% b) 58,07% c) 94,99% d) 34,50%

6.44 Werkzeugmacherei

Ein Betrieb macht 39% seines Umsatzes mit Werkzeugen und den Rest mit Fertigteilen. Die Werkzeuge teilen sich in Spritzgussformen (32%) und Umformwerkzeuge, beide werden zu 54% exportiert. Die Fertigteile teilen sich in Spritzgussteile (55%, Exportrate 70%) und Umformteile (Exportrate 40%).

a) Welcher Anteil des gesamten Umsatzes wird mit exportierten Spritzgussformen gemacht?
b) Welcher Anteil des gesamten Umsatzes wird im Inland gemacht?
c) Welcher Anteil des gesamten Umsatzes wird mit Spritzguss (Teile oder Formen) gemacht?
d) Welcher Anteil des Umsatzes mit Fertigteilen wird im Export erbracht?*

6.45 Telefon-Gewinnspiel

Ein Radiosender veranstaltet ein Telefon-Gewinnspiel. Per Computer werden 5% der Anrufer zum 50 €-Rätsel und 1% der Anrufer zum 250 €-Rätsel durchgeschaltet. Der Rest fällt raus.

Für 50 € muss eine Frage richtig beantwortet werden, für 250 € deren zwei. Jede einzelne Frage wird zu durchschnittlich 20% richtig beantwortet.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 250 € zu gewinnen, wenn man einmal anruft?
b) Wie viele Anrufer von 1000 können einen Gewinn einheimsen?
c) Wer gewinnt bei dem Spiel, wenn der Radiosender je Anruf 1 € kassiert?*

6.46 Kanalrohre

Zu einer Tiefbaustelle werden 50 Kanalrohre auf je einem Lkw geliefert. 19 der Rohre sind falsch herum geladen und müssen beim Abladen unter Zeitverlust gedreht werden.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ...

a) ... muss das erste Rohr gedreht werden?
b) ... werden 5 der ersten 10 Rohre falsch geliefert?
c) ... werden höchstens 2 der ersten 3 Rohre falsch geliefert?
d) ... werden die ersten 5 Rohre falsch angeliefert?
e) ... wird das fünfte Rohr richtig geliefert?*

6.47 Rohrprüfung

Zu einer anderen Tiefbaustelle werden 750 Rohre geliefert. Vereinbart ist eine Prüfung mittels Einfachstichprobenanweisung.

a) Schlagen Sie eine Einfach-Stichprobenanweisungen (n-c-Anweisung) nach AQL (Prüfniveau II, normale Prüfung, zulässiger Fehleranteil 1,0%), und erläutern Sie die Prüfung nach dieser Anweisung.
b) Welchen Unterschied würde es machen, wenn man die Einfachstichprobenanweisung für eine Lieferung von 200 Rohren auswählen und durchführen würde?
c) Wie groß wäre das Lieferantenrisiko, wenn tatsächlich 0,8% Ausschussanteil geliefert werden?
d) Wie groß ist das Kundenrisiko, wenn tatsächlich 1,2% Ausschussanteil geliefert werden?*

6.48 Autos aus dem Süden

10% der Autos, die aus dem Süden kommen, sind rot, 20% sind blau. An der mittleren Kreuzung fahren 20% nach Westen, 35% nach Osten und der Rest nach Norden Richtung nördliche Kreuzung. An der nördlichen Kreuzung trennt sich der Verkehrsfluss noch einmal nach Nordwesten (60%) und Nordosten (40%).

Wie viele Prozent aller Autos ...

a) … fahren nach Nordosten?
b) ... sind blau und fahren nach Nordwesten?
c) ... sind rot und fahren nach Osten oder Westen*

6.49 Party-Häppchen 1

Für eine Party haben Sie 50 Häppchen vorbereitet, davon 10 mit Butter und der Rest mit Diät-Margarine. Leider sind sie durcheinander geraten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ...

a) ... nimmt ein Gast zufällig ein Butter-Häppchen?
b) ... sind alle 3 Häppchen, die ein Gast nimmt, gebuttert?
c) ... sind mehr als zwei von 4 Häppchen, die ein Gast nimmt, mit Butter geschmiert?
d) Nach der Party sind 10 Häppchen übrig geblieben, davon 3 mit Butter. Einige Katzen schnüffeln zufällig an je einem Häppchen, ohne es zu fressen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben von 5 Katzen höchstens 2 an einem Margarine-Häppchen geschnüffelt?*

6.50 Party-Häppchen 2

Für die nächste Party produziert ein befreundetes Paar die Häppchen. Der Mann schafft 30 % der Häppchen, davon 25% mit Käse, 35% mit Wurst und Rest Fisch. Die Frau macht die anderen Häppchen mit 50 % Käse, 20% Wurst und 30% Fisch.

Ein Gast greift völlig wahllos ein Häppchen. Wie welcher Wahrscheinlichkeit erwischt er ...

a) ... Fisch?
b) ... Wurst (aus weiblicher Produktion) oder Fisch?*

6.51 Party-Häppchen 3

Nach dem Erfolg dieser Parties steigen Sie ins Catering-Geschäft ein und vereinbaren mit Ihrem Lieferanten Einfach-Stichprobenanweisungen nach AQL (normal, Prüfniveau II).

a) Schlagen Sie eine geeignete Anweisung vor für Lieferungen von je 1000 Häppchen bei einem zulässigen Ausschussanteil von 0,065%.
b) Erläutern Sie die Prüfung nach dieser Anweisung.
c) Wie groß ist Ihr Kundenrisiko, wenn Ihnen 0,25% Ausschussanteil geliefert wird°?
d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie bei einer Stichprobe genau 2 schlechte Häppchen prüfen, wenn die Lieferung tatsächlich 0,08% Ausschussanteil enthält?*

*6.44: a) 6,74% b) 44,48% c) 46% d) 56,5%
*6.45: a) 0,04% b) 10,4 c) 0,60 €
*6.46: a) 38% b) 19,23% c) 95,06% d) 0,549% e) 62%
6.47: a) 80-2 b) 50-1 c) 2,67% d) 92,80%

*6.48: a) 18,0% b) 5,4% c) 5,5%
*6.49: a) 20% b) 0,6122% c) 2,18% d) 16,31%
*6.50: a) 33% b) 47%
6.51: a) 200-0 b) 60,62% c) 1,09%

6.52 Speicherbausteine

Auf einem Computerflohmarkt kaufen Sie günstig 5 Speicherbausteine, von denen aber nach Auskunft des Händlers 2 defekt sind.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der erste Baustein, den Sie einbauen, defekt?

b) Zwei Bausteine bauen Sie im alten 486er ein. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind alle defekt?*

6.53 Drehwiderstände

In einer Fabrik werden Drehwiderstände auf 2 Anlagen (Anlage a 40%, Anlage b 60%) in 3 Güteklassen hergestellt mit der folgenden Verteilung:

	1. Wahl	***2. Wahl***	***3. Wahl***
Anlage a	70%	20%	10%
Anlage b	60%,	25%	15%

Ein Teil wird zufällig entnommen und verkauft. Wie welcher Wahrscheinlichkeit ...

a) ... ist das Bauteil erster Wahl?

b) ... ist das Teil erster oder zweiter Wahl oder von Maschine b produziert?

c) ... wurde das verkaufte Teil erster oder zweiter Wahl auf der Anlage a hergestellt?*

6.54 Haltegriffe

Sie haben von einem Automobilhersteller den Auftrag für die Lieferung der Haltegriffe im Fahrzeuginnern erhalten. Zur Kontrolle der Lieferungen schlägt der Einkäufer der Automobilfirma eine Einfach-Stichprobenanweisungen nach AQL 1,0 J normal Prüfniveau II vor.

a) Erläutern Sie die Prüfung bei einer der täglichen Lieferungen von 1000 Haltegriffen.

b) Wie groß ist Ihr Lieferantenrisiko, wenn Sie mit einem Ausschussanteil von 0,5% rechnen.

c) Wäre unter diesen Umständen eine n-c-Anweisung 125-3 günstiger für Sie?*

6.55 Satellitenanlage

Bei einem langen Abend am Schreibtisch kommt Ihre Frau und sagt Ihnen, dass 2 gute Filme im Fernsehen kämen. Sie haben sowieso die Nase voll und wollen endlich einmal Ihre neue Satellitenanlage mit 25 Programmen ausnutzen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie ...

a) ... auf Anhieb (nach dem Einschalten ohne Umschalten) <u>einen</u> der guten Filme erwischen?

b) ... unter 8 Programmen immer noch <u>keinen</u> der guten Filme gefunden haben?*

6.56 Gute Filme

Tatsächlich beträgt der Anteil guter Filme an einem normalen Abend durchschnittlich 5% aller ausgestrahlten Sendungen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Abend <u>genau 2</u> gute Filme kommen?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Abend <u>mindestens ein</u> guter Film kommt?*

6.57 Bolzen härten

Ein Betrieb härtet auf einer Anlage Bolzen (35%) und Zylinderstifte (65%). Die Bolzen haben 4% Ausschuss. Die Zylinderstifte teilen sich in Form A zu 80% und Form B (20%) und haben in beiden Formen 5% Ausschuss.

a) Welcher Anteil der gesamten Produktion umfasst gute Bolzen?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewähltes Teil der Produktion ein Ausschussteil?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewähltes Teil aus der Ausschusskiste ein Zylinderstift Form B?

d) Wie groß wird der Ausschuss bei den Bolzen, wenn 6% des eingesetzten Materials zu wenig Kohlenstoff enthält und keine ausreichende Härte erreichen kann?*

6.58 Potentiometer

In einer Fabrik werden Potentiometer auf zwei Anlagen (Anlage a 40%, Anlage b 60%) in 3 Güteklassen mit der folgenden Verteilung hergestellt:

	1. Wahl	***2. Wahl***	***3. Wahl***
Anlage a	70%	20%	10%
Anlage b	60%,	25%	15%

Ein Teil wird zufällig entnommen und verkauft.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Bauteil erster Wahl?

b) Wie welcher Wahrscheinlichkeit ist das Teil erster oder zweiter Wahl oder von Maschine b produziert?

c) Wie welcher Wahrscheinlichkeit wurde das verkaufte Teil auf der Anlage a hergestellt, wenn der Kunde festgestellt hat, dass es erste oder zweite Wahl ist?

d) Je 5 Drehwiderstände werden als Bildregler in Monitore eingebaut. An einem Monitor seien 2 Drehwiderstände defekt.
Wie groß ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass man Helligkeit, Farbe und Kontrast einstellen kann, aber die horizontale und vertikale Bildverschiebung nicht funktionieren?*

* 6.52: fehlt
* 6.53: fehlt
* 6.54: a) 80-2 b) 0,77118% c) s.u. d) 0,37483%
* 6.55: a) 8% b) 45,33%
6.56: a) 72,261% b) 23,051%

* 6.57: a) 33,6% b) 4,65% c) 13,978% d) 9,8%
6.58: fehlt

7 Hardcore und Entwürfe

7.1 Spielabbruchproblem

Zwei Schüler A und B werfen eine Münze und wer nach 9 Würfen öfter gewonnen hat, soll den ganzen Einsatz bekommen. Als sie von einem Lehrer gestört werden, wollen Sie den Einsatz nach den verbleibenden Gewinnchancen verteilen.*

a) Wie groß sind die Gewinnchancen beim Stand von 4:3?

b) Fermat schlug vor, das Spiel gedanklich zu Ende zu spielen und den Einsatz nach der Anzahl der Möglichkeiten zu verteilen. Kritiker meinten, ein Wurf dürfe nicht mehr zählen, wenn das Spiel entschieden sei. Klären Sie die Situation mithilfe eines Wahrscheinlichkeitsbaums.

c) Berechnen Sie mit einer Verteilungsfunktion, wie der Einsatz beim Stand von 3:2 verteilt wird.

7.2 Das Ziegenproblem

In einer Gameshow sind hinter 3 Toren ein Auto und zwei Ziegen verteilt. Der Kandidat gewinnt das Auto, wenn er das richtige Tor findet.

Das Spiel läuft in 3 Schritten ab:

I. Der Kandidat wählt ein beliebiges Tor.
II. Der Moderator öffnet eines der Tore, das nicht gewählt wurde, und zeigt eine Ziege.
III. Der Kandidat darf seine erste Wahl ändern.

a) Soll der Kandidat bei seiner ersten Wahl bleiben oder ein anderes Tor wählen?*

7.3 Wer wird Millionär

Wer bei der o.g. Quizsendung die Gewinnsumme von 125000 € erreicht, nimmt das Geld oder spielt weiter. Mit Spielen gewinnt man 500'000€ für die richtige von 4 möglichen Antworten auf eine Frage, sonst fällt man auf 500€ zurück.

a) Ermitteln Sie den Erwartungswert für den Gewinn, wenn man auf 500'000 € zockt ohne Ahnung.

b) In einer Abwandlung der Quizsendung spielen viele Prominente für einen guten Zweck.
Was raten Sie einem solchen Spieler, wenn er vor der Entscheidung aus a) steht?*

7.4 Berliner Roulette

Beim Berliner Roulette essen 2 Personen abwechselnd insgesamt 6 Berliner Krapfen, von denen einer mit Senf gefüllt ist.Wer ihn erwischt, verliert.

a) Ein Mitspieler überlegt, ob der erste oder zweite Spieler im Vorteil ist. Prüfen Sie dies mit Hilfe eines Wahrscheinlichkeitsbaumes.*

7.5 Geburtstagsproblem

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ...

a) ... 2 (3; 4 ...) beliebige Menschen am gleichen Tag Geburtstag feiern?

b) Wie viele Menschen müssen versammelt sein, sodass die Wahrscheinlichkeit eines gemeinsamen Geburtstages zweier über 50% liegt?

c) ... in Ihrer Klasse keine 2 Klassenmitglieder an einem Tag Geburtstag haben?*

7.6 Bruchstückhafte Information

Ein Mensch erzählt ihnen ohne weitere Informationen, dass er 2 Kinder habe.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Kinder gleichen Geschlechtes sind?

b) Der Mensch informiert sie nun, dass unter seinen beiden Kindern mindestens ein Junge sei?
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sein zweites Kind ein Mädchen ist?

c) Danach präzisiert der Mensch, dass das ältere Kind ein Junge sei.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sein zweites Kind ein Mädchen ist?

d) Erklären Sie den Unterschied dieser Aufgabe zu Aufgabe 7.7.*

7.7 Kartenpaare

a) Nehmen Sie 2 rote und 2 schwarze Karten aus einem Kartenspiel, mischen Sie sie und legen sie verdeckt aus. Wählen Sie dann zufällig 2 Karten.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gewählten Karten die gleiche Farbe haben?*

7.8 DNA-Test

Bei einem Gentest wird nicht die ganze DNA, sondern nur 13 kurze Abschnitte verglichen, die jeweils zu etwa 10% mit dem gleichen Abschnitt eines anderen, nicht verwandten Menschen übereinstimmen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die DNA-Tests von 2 beliebigen, nicht verwandten Menschen übereinstimmen?

b) Bei einem Kriminalfilm werden Täter systematisch mit DNA-Tests gesucht. Wie viele Untersuchungen sind nötig, bis ein Mensch mit der gleichen DNA wie die des Täters gefunden wird?*

7.9 Hardware-Redundanz

Ein Fallschirm öffne mit p = 0,999, der Reserveschirm ebenso.

a) Wie groß ist das Risiko für einen Fallschirmspringer, dass keiner der beiden Schirme aufgeht?

b) Beurteilen Sie das Risiko des Springers, nachdem der Hauptschirm wegen eines Packfehlers nicht geöffnet hat?

c) Beurteilen Sie das Risiko eines Springers, der bei einem Jubiläumssprung Champagner statt seines Reserveschirmes eingepackt hatte?*

7.10 Doppelt verschlossene Türe

Annahmen: 40% aller Frauen schließen Türen mit 2 Schlüsselumdrehungen, aber nur 5% der Männer. 35% aller Türen werden von Frauen verschlossen.

---

* 7.1: a) 3:1 b) s.u. c) 68,75% (nach [Devlin 2008])
Das Spielabbruchproblem ist vermutlich der Ursprung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ab dem 16. Jhd. u.Z. war es offenbar so drängend, dass sich zahlreiche Mathematiker damit beschäftigten, ua. Pierre de Fermat (ca.1608-1665). Bezahlt wurden sie von reichen Müßiggängern, die ihre Zeit mit verbotenem Glücksspiel totschlugen, oft von Polizei gestört wurden und trotzdem ihre Chancen wahren wollten.

* 7.2: Wenn er das andere Tor wählt, gewinnt der Kandidat das Auto mit der Wahrscheinlichkeit von 2/3, sonst nur zu 1/3. Also sollte er wechseln!
Nach Marilyn vos Savant, geschildert in [SdW] 11/1991

* 7.3: a) E = 125375€ b) Zocken !

* 7.4: keine Überraschung

* 7.5

* 7.6 (Nach [Devlin 2008] S.166ff)

* 7.7: Nach [Stewart 2009]

* 7.8 (Nach [SdW] 7/97 S.8 „Der Trugschluss des Anklägers“ von Ian Steward)

* 7.9: Das Prinzip der Redundanz (=mehrfach vorhandene Systeme) wird in der Technik (2 Bremskreise im Auto) und auch in der Natur (2 Nieren) häufig angewandt, um Ausfälle eines Systemes kompensieren zu können und damit die Gesamtausfallsicherheit zu erhöhen. (nach [Randow 1992] 1 S.24). Die Versagensquote P = 0,001 für den Reserveschirm gilt ohne Vorkenntnisse. In diesem Fall ist aber bekannt, dass ein Packfehler vorliegt, also ein systematischer Fehler, der auch beim Reserveschirm zuschlagen kann. Verallgemeinert kann man sagen, dass das Risiko redundanter Systeme größer ist als das Produkt der Einzelrisiken, weil Fehler oft systematisch auftreten. Dies Problem fand die NASA sogar bei getrennt programmierter Software, weil Programmierer zu typischen Fehlern neigen.)
In einigen Fällen sind 2 parallele Systeme nicht ausreichend redundant: Verfügt ein Flugzeug über zwei Kompasse, von denen einer die falsche Richtung anzeigt, weiß der Pilot nicht, welchem er folgen soll. Deshalb sind solche Systeme mindestens 3fach vorhanden.
a) P = 1/100000 b) P > 1/1000 c) P = 1/1000

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Türe, die sie doppelt verschlossen vorfinden, von einer Frau verschlossen wurde?

Venn-Diagramm einführen → [Crilly 2007] S.129

7.11 Geschwister

a) Haben Mädchen mehr Brüder als Jungen?

7.12 Tesla

Der Autohersteller Tesla baut die Akkus für seine Elektrofahrzeuge aus jeweils 7000 einzelnen Lithium-Zellen. Bei durchschnittlich 1 ppm Akkus (1 von 1 Mio.) kommt es zu einem Thermal Runaway, d.h. einem internen Kurzschluss, der zu Überhitzung, Kettenreaktion und Brand führen kann.

a) Wie groß ist die W. für einen Thermal Runaway bei einem Tesla?

7.13 Bluffen

Aufgabe entwickeln aus [Mérö 1996] S.103

7.14 Unschuldig

25% aller Knastinsassen seien unschuldig.

a) Wie groß ist das Risiko für einen Durchschnittsbürger, unschuldig in den Knast zu kommen?

7.15 Zur Sicherheit von Passwörtern

Passwörter können durch bloßes Ausprobieren (Brute-Force-Methode) ermittelt werden. Man nennt sie sicher, wenn das Passwort so viele Möglichkeiten umfasst, dass sie nicht innerhalb einer vernünftigen Zeit „geknackt“ werden können.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine Passwort zufällig beim ersten Versuch zu treffen, wenn es ..

a) … aus 8 Ziffern (10 Möglichkeiten) besteht?
b) … aus 8 Buchstaben (26 Möglichkeiten) besteht?
c) … aus 8 Buchstaben mit Groß- und Kleinschreibung besteht?
d) … aus 8 Ziffern oder Buchstaben besteht?
e) … aus 8 alphanumerischen Zeichen (Ziffern, Buchstaben, Sonderzeichen..) besteht?
f) Berechnen Sie die Zeit, die die Passworte der Brute-Force-Methode standhalten, wenn moderne Systeme 1 Milliarde Kombinationen pro Sekunde durchprobieren können.

Lösungen

1 Einfache Wahrscheinlichkeiten P

1.1 Ein Würfel

a) Geg S = {1; 2; 3; 4; 5; 6} ≅ 6 mögliche Ereignisse; A = {3} ≅ 1 untersuchtes Ereignis
Lsg p(A aus S) = 1/6 = 16,7%

b) Geg S = {1; 2; 3; 4; 5; 6} ≅ 6 mögliche Ereignisse; A = {2; 4; 6} ≅ 3 untersuchte Ereignisse
Lsg p(A aus S) = 3/6 = 0,5 = 50%

1.2 Spielsteine
p(5 aus 5000) = 5/5000 = 0,001 = 0,1%

1.3 Zwei Würfel
Mit zwei Würfeln kann man Summen von 2 bis 12 würfeln, die aber nicht gleich wahrscheinlich sind. So kann die Zahl 5 durch die Kombinationen 1+4; 2+3; 3+2 und 4+1 gewürfelt werden, aber die Zahl 2 nur mit einem Pasch aus zwei Einsen. Es bietet sich an, die Würfelsummen in einer Matrix darzustellen:

Würfelsummen		Augenzahl Würfel 1					
		1	2	3	4	5	6
Augenzahl Würfel 2	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

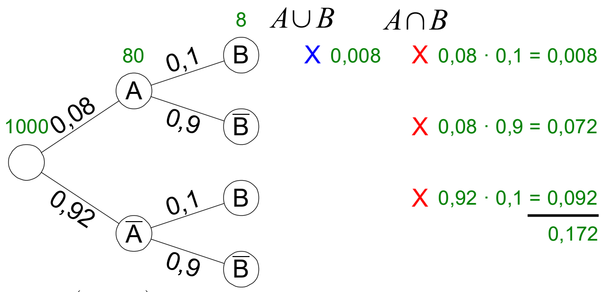
Jedes der Matrixfelder ist gleich wahrscheinlich, deshalb ist diese Darstellung für das Wahrscheinlichkeitsgesetz geeignet.

a) Es sind 36 Ereignisse möglich, davon interessieren alle mit der Würfelsumme 7, also 6 Ereignisse:
Lsg p({7}) = 6/36 = 1/6 = 16,7%

b) Lsg p({4}) = 3/36 = 1/12 = 8,3%

2 kombinierte Wahrscheinlichkeiten → W-Baum

2.1 Lackierei



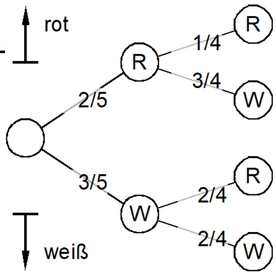
a) $P(A \wedge B) = 0{,}08 \cdot 0{,}1 = 0{,}008$

b) $P(A \vee B) = 0{,}08 \cdot 0{,}1 + 0{,}08 \cdot 0{,}9 + 0{,}92 \cdot 0{,}1 = 0{,}172$

c) $P(A\,XOR\,B) = 0{,}08 \cdot 0{,}1 + 0{,}92 \cdot 0{,}1 = 0{,}164$

2.2 Socken
Als Teilexperimente für den Wahrscheinlichkeitsbaum bieten sich die Züge an: 1. Socke, 2. Socke. Die Wahrscheinlichkeiten für die Äste des W-Baumes ergeben sich jeweils aus dem (Rest-) Inhalt der Schublade.

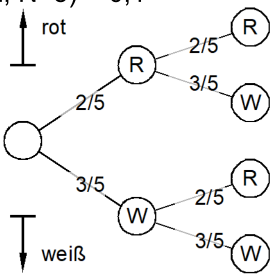
a) „Ohne Zurücklegen“ verändert mit jedem Zug die Wahrscheinlichkeiten. Man nennt es eine hypergeometrische Verteilung. Sie entspricht eher der Realität, weil Stichproben nicht zurück gelegt werden, war aber ohne Computer schwerer zu berechnen.



$P = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}10$

=HypGeomVert(x≥2; n=2; d=2; N=5) = 0,1

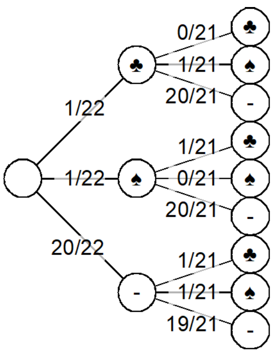
b) „Mit Zurücklegen“ macht die Züge unabhängig voneinander, man nennt es eine binomiale Verteilung. Sie wird oft statt der hypergeometrischen Verteilung für Berechnungen verwendet, weil die binomiale rechnerisch leichter zu handhaben ist.



$P = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = 0{,}16$

16% =BinomVert(x≥2; n=2; P=2/5)

2.3 Skat
Das 1.Teilexperiment für den W-Baum ist das Ziehen der ersten Karte, das andere Teilexperiment ist das Ziehen der zweiten Karte.



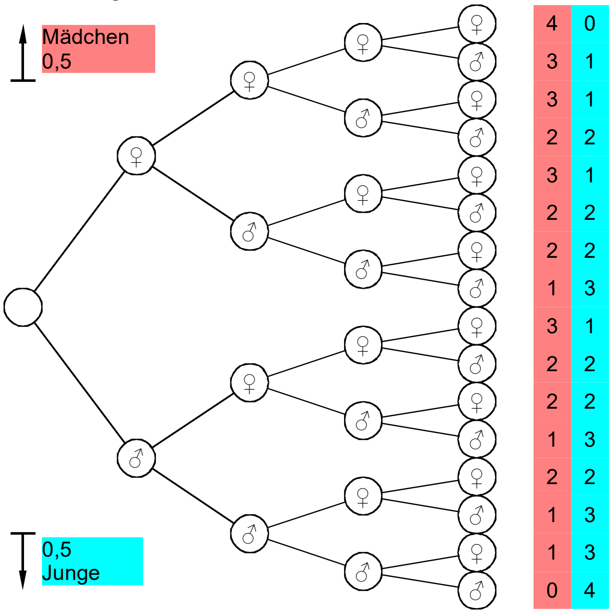
a) $P = \frac{1}{22} + \frac{21}{22} \cdot \frac{1}{21}$
$= \frac{2}{22} = \frac{1}{11} = 0{,}091$
9,1% =HypGeomVert(x≤1; n=2; d=1; N=22)

b) $P = \frac{2}{22} + \frac{20}{22} \cdot \frac{2}{21}$
$= \frac{82}{462} = 0{,}1774892$
17,75% =HypGeomVert(x≤1; n=2; d=2; N=22)
nicht ganz doppelt so groß wie a) weil auch Kreuz- UND Pikbube möglich ist. Beweis: b) + c) = 2 × a)

c) $P = \frac{2}{22} \cdot \frac{1}{21} = \frac{2}{462} = 0{,}004329$
0,433% =HypGeomVert(x≤2; n=2; d=2; N=22)

d) $P = \frac{1}{22} \cdot \frac{20}{21} + \frac{1}{22} \cdot \frac{20}{21} + \frac{20}{22} \cdot \frac{1}{21} + \frac{20}{22} \cdot \frac{1}{21} = \frac{80}{462} = 0{,}173$
17,3% =HypGeomVert(x=1; n=2; d=2; N=2)

2.4 Kindersegen



Die Teilexperimente entsprechen Geburten.

a) $P=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}=0{,}25$

25% =BinomVert(x=3; n=4; P=0,5)

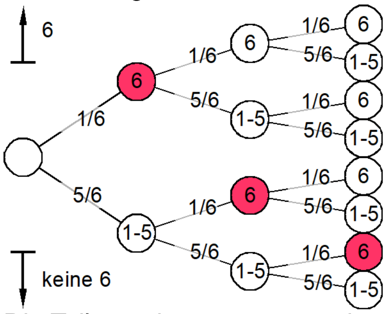
b) $P=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$

Die Wahrscheinlichkeit für Reihenfolgen ist über die Verteilungen nicht lösbar.

c) $P=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$

6,25% =BinomVert(x≥4; n=4; P=0,5)

2.5 Mensch-ärgere-dich-nicht

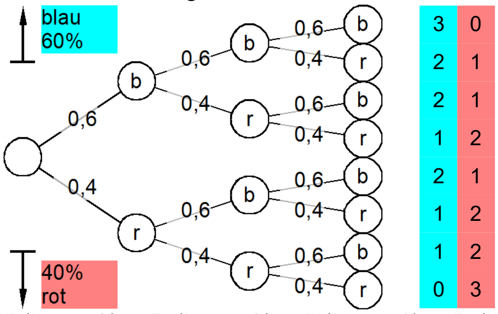


Die Teilexperimente entsprechen den Würfen, wobei der W-Baum an dem Ästen endet, an dem eine 6 gewürfelt wurde.

$P=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{6\cdot6+6\cdot5+5\cdot5}{6\cdot6\cdot6}=\frac{91}{216}=0{,}42$

42,13% =BinomVert(x≥1; n=3; P=1/6)

2.6 Schutzumschläge



a) P(blau≤2) = P (blau=0) + P(blau=1) + P (blau=2)

$P=0{,}4^3\cdot0{,}6^0\cdot1+0{,}4^2\cdot0{,}6^1\cdot3+0{,}4^1\cdot0{,}6^2\cdot3$

$=0{,}064\cdot1+0{,}096\cdot3+0{,}144\cdot3=0{,}784$

78,04% =BinomVert(x≤2; n=3; p=0,6; 1)

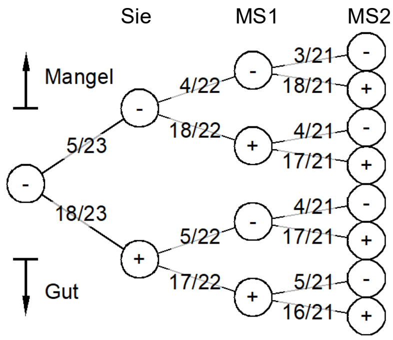
b) P(rot≤2) = P (blau=3) + P(blau=2) + P (blau=1)

$P=0{,}6^3\cdot0{,}4^0\cdot1+0{,}6^2\cdot0{,}4^1\cdot3+0{,}6^1\cdot0{,}4^2\cdot3$

$=0{,}216+0{,}144\cdot3+0{,}096\cdot3=0{,}936$

93,6% =BinomVert(x≤2; n=3; p=0,4 (rot!); 1)

2.7 Schulbücher



a) $P(a)=\frac{5}{23}=0{,}2174$

21,7% = HYPGEOMVERT(x=1; n=1; d=5; N=23)

b) $P(b)=\frac{5\cdot4}{23\cdot22}\cdot1=\frac{10}{253}=0{,}03953$

3,95% = HYPGEOMVERT(x=2; n=2; d=5; N=23)

c) $P(c)=\frac{5\cdot4\cdot18}{23\cdot22\cdot21}\cdot2=\frac{720}{10626}=\frac{120}{1771}=0{,}06778$

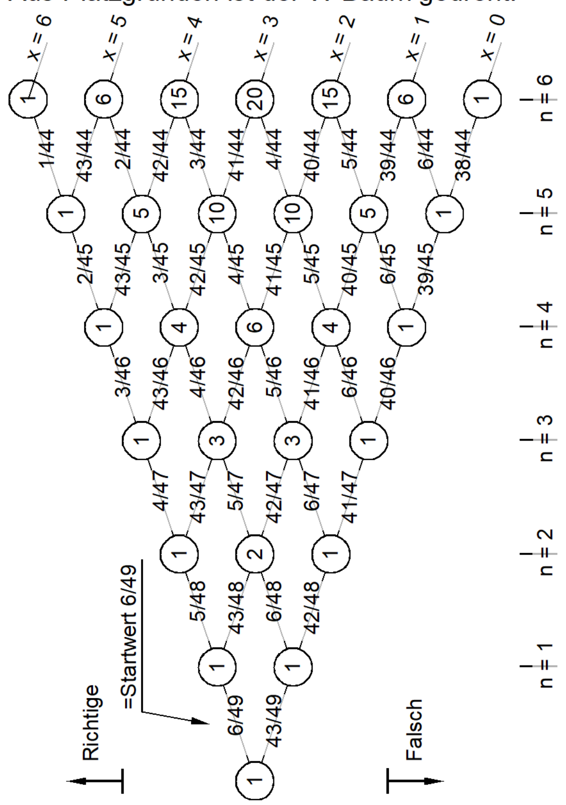
Die Wahrscheinlichkeit für Reihenfolgen ist über die Verteilungen nicht lösbar.

d) $P(c)=\frac{5\cdot4\cdot18}{23\cdot22\cdot21}\cdot1=0{,}03388$

Die Wahrscheinlichkeit für Reihenfolgen ist über die Verteilungen nicht lösbar.

2.8 Lotto 6 aus 49

Aus Platzgründen ist der W-Baum gedreht:



a) 6 Richtige

Im ersten Zug hat man noch 6 günstige von insgesamt 49 Möglichkeiten. Wenn eine falsche Zahl gezogen wird, ist man aus dem Rennen und braucht nicht weiter zu rechnen. Also fehlt im zweiten Zug eine günstige Zahl und es bleiben nur noch 5 günstige von insgesamt 48 möglichen Zahlen usw. Die Wahrscheinlichkeit für x=6 Richtige beträgt.

$$P(6)=\frac{6}{49}\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{4}{47}\cdot\frac{3}{46}\cdot\frac{2}{45}\cdot\frac{1}{44}=\frac{1}{13'983'816}$$

0,00000715% =HYPGEOMVERT(x=6; n=6; d=6; N=49)

b) Für 5 Richtige kann man sich eine falsche Zahl erlauben. Das kann sein im ersten Zug:

$$P(5)_1=\frac{43}{49}\cdot\frac{6}{48}\cdot\frac{5}{47}\cdot\frac{4}{46}\cdot\frac{3}{45}\cdot\frac{2}{44}$$

oder im zweiten Zug:

$$P(5)_2=\frac{6}{49}\cdot\frac{43}{48}\cdot\frac{5}{47}\cdot\frac{4}{46}\cdot\frac{3}{45}\cdot\frac{2}{44}$$

oder später. Man erkennt, dass die einzelnen Wege die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, weil die Zahlen über und unter dem Bruchstrich nur ihre Reihenfolge ändern. Da es insgesamt 6 Wege zu 5 Richtigen gibt, kann man die Wahrscheinlichkeit eines Einzelweges mit 6 multiplizieren und erhält so die Wahrscheinlichkeit für 5 Richtige:

$$P(5)=6\cdot\frac{43\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{49\cdot48\cdot47\cdot46\cdot45\cdot44}=\frac{1}{54200{,}8}$$

0,00185% =HYPGEOMVERT(x=5; n=6; d=6; N=49)

c) 4 Richtige

Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Weges:

$$P(4)_1=\frac{43}{49}\cdot\frac{42}{48}\cdot\frac{6}{47}\cdot\frac{5}{46}\cdot\frac{4}{45}\cdot\frac{3}{44}$$

Es gibt 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 Wege, also ist die Wahrscheinlichkeit für 4 Richtige:

$$P(4)=15\cdot\frac{43}{49}\cdot\frac{42}{48}\cdot\frac{6}{47}\cdot\frac{5}{46}\cdot\frac{4}{45}\cdot\frac{3}{44}=\frac{1}{1032{,}4}$$

0,0969% =HYPGEOMVERT(x=4; n=6; d=6; N=49)

d) Für 3 Richtige (20 Wege) erhält man:

$$P(3)=20\cdot\frac{43}{49}\cdot\frac{42}{48}\cdot\frac{41}{47}\cdot\frac{6}{46}\cdot\frac{5}{45}\cdot\frac{4}{44}=\frac{1}{56{,}7}$$

1,765% =HYPGEOMVERT(x=3; n=6; d=6; N=49)

e) Für 5 Richtige mit Zusatzzahl

kann man sich zwar keine falsche Zahl erlauben, aber die Zusatzzahl. Deshalb kann man wie bei der Wahrscheinlichkeit für 5 Richtige rechnen, muss aber statt der 43 Möglichkeiten für eine falsche Zahl nur 1 Möglichkeit für die Zusatzzahl einsetzen.

$$P(5+Zusatz)=6\cdot\frac{\cancel{43}1\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{49\cdot48\cdot47\cdot46\cdot45\cdot44}=\frac{1}{2'330'636}$$

Man kann auch überlegen, dass jede der 6 Möglichkeiten einer 5 mit Zusatzzahl genauso wahrscheinlich ist wie 6 Richtige. Dann muss die Wahrscheinlichkeit für 5 Richtige mit Zusatzzahl 6-mal größer sein als für 6 Richtige.

=HYPGEOMVERT(x=6; n=6; d=7; N=49) -
=HYPGEOMVERT(x=6; n=6; d=6; N=49)
= 0,0000500% - 0,0000071% = 0,0000429%
≈ 1/2330636

Im Lösungsvorschlag mit der hypergeometrischen Verteilung wird zunächst die Wahrscheinlichkeit berechnet, mit n=6 Kreuzen auf dem Tippzettel x=6 Übereinstimmungen mit den d=7 Kugeln der Ziehung (6 Richtige + 1 Zusatzzahl) zu haben. Darin enthalten ist aber noch die Möglichkeit, 6 Richtige ohne Zusatzzahl zu haben, diese wird abgezogen.

3 Erwartungswert

3.1 Lotto 6 aus 49, die Zweite

a)
$$\begin{aligned}&E(Lotto\ in\ D)\\&=P(6)\cdot A(6)+P(5+)\cdot A(5+)\\&\quad+P(5)\cdot A(5)+P(4)\cdot A(4)+P(3)\cdot A(3)\\&=\frac{1}{13983816}\cdot500000\,€+\frac{1}{2330636}\cdot43000\,€\\&\quad+\frac{1}{54201}\cdot3000\,€+\frac{1}{1032}\cdot40\,€+\frac{1}{56{,}7}\cdot10\,€\\&=0{,}325\,€\end{aligned}$$

Für jeden Euro Einsatz bekommt man durchschnittlich knapp 33 Ct heraus. Hinweis: In dieser Rechnung sind einige Gewinnmöglichkeiten unterschlagen (6 mit Superzahl, 4 und 3 Richtige mit Zusatzzahl)

3.2 Eine Zockerpartie

Die Teilexperimente entsprechen den Würfeln mit einer Wahrscheinlichkeit von je 1/6 für das richtige Feld. Dies ergibt 0,46% für 3 Richtige, 6,94% für 2 Richtige, 34,72% für 1 Richtige und 57,87% für keinen Richtigen.

Zur Bewertung der Spielsituation ist dies noch nicht ausreichend, sondern man muss den sogenannten Erwartungswert berechnen, der in diesem Fall angibt, wie viel Geld der Spieler im Schnitt zurück bekommt. Dazu wird die Wahrscheinlichkeit für 3 Richtige 0,46% mit ihrem Gewinnwert 4€ multipliziert. Wenn man dies mit allen Gewinnwerten tut und die Ergebnisse addiert, erhält man den Erwartungswert. Wenn der Erwartungswert kleiner als der Einsatz ist, verlieren die Spieler auf Dauer.

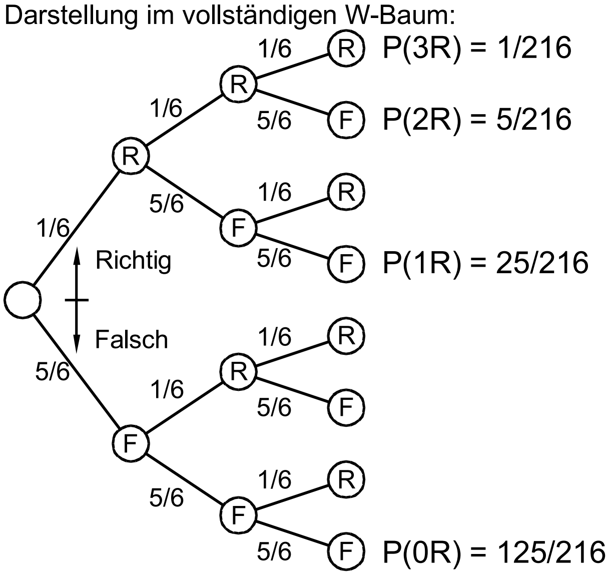
Lsg: für jeden Euro Einsatz erhält der Spieler

$$E(Auszahlung) = 4\,€\cdot\frac{1}{216} + 3\,€\cdot\frac{15}{216} + 2\,€\cdot\frac{75}{216} = 0{,}921\,€ = 92{,}1\,Cent$$

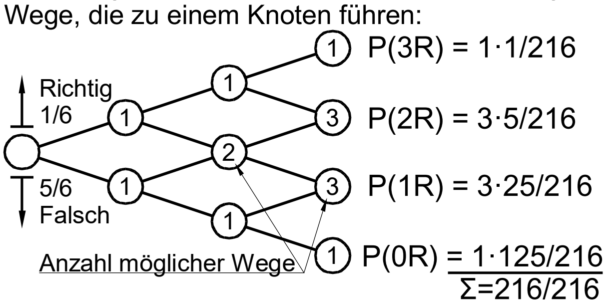
Man kann auch mit Gewinnen rechnen:

$$E(Gewinn) = 3\,€\cdot\frac{1}{216} + 2\,€\cdot\frac{15}{216} + 1\,€\cdot\frac{75}{216} + (-1\,€)\cdot\frac{125}{216} = -0{,}079\,€ = -7{,}9\,Cent$$

Darstellung im vollständigen W-Baum:

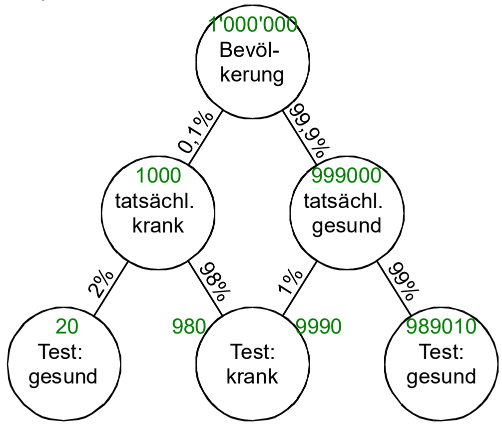


Darstellung im vereinfachten W-Baum für binomiale Verteilungen. Beachten Sie die Anzahl der mögliche Wege, die zu einem Knoten führen:



4 Bayes'sche Formel

4.1 Hepatitis-Test



Das 1. Teilexperiment des W-Baumes ist die Einteilung in tatsächlich Kranke und Gesunde. Dieses Teilexperiment findet nur gedanklich statt, denn es ist ja nicht bekannt, wer krank oder gesund ist. Bei dem Gedankenexperiment geht es auch nur um die Mengen der tatsächlich Kranken / Gesunden.
Im 2. Teilexperiment wird untersucht, wie viele gesunde Personen (fälschlicherweise) als krank eingestuft werden.

a) Wer mit den Prozentzahlen Probleme hat, setzt einfach eine große Zahl für die Bevölkerung ein, zum Beispiel 1'000'000 (grüne Zahlen).
Scheinbar krank sind so 980 + 9990 =10970, davon aber 'nur' 980 tatsächlich krank, also 8,9%.

Profis rechnen in Verhältnissen:

$$P = \frac{0{,}999\cdot 0{,}01}{0{,}001\cdot 0{,}98 + 0{,}999\cdot 0{,}01} = 0{,}916$$

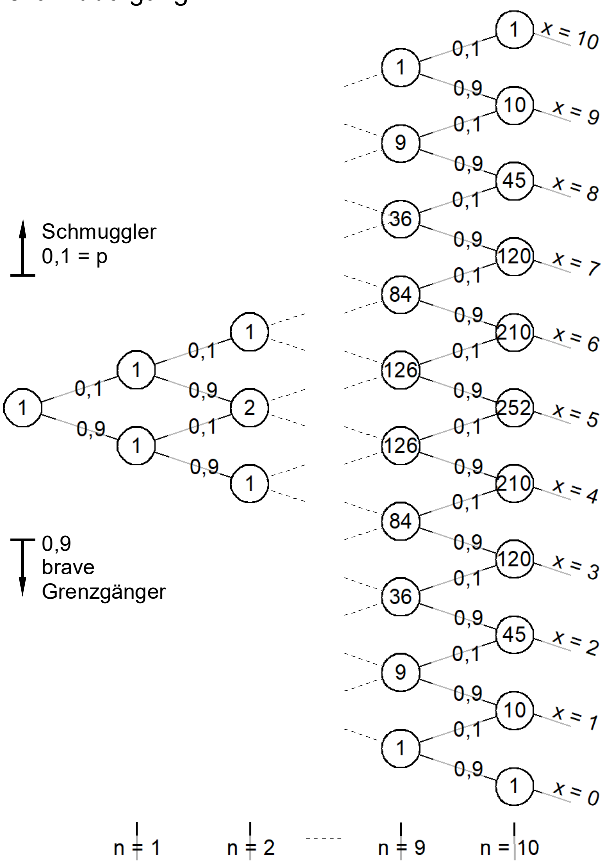
Eine Person, die unter diesen Umständen das Testergebnis „krank“ erhalten hat, kann noch ziemlich entspannt bleiben, denn seine Hoffnung beträgt 91,6%. Aus diesem Grunde muss jeder Test mehrfach erfolgen, am besten mit verschiedenen Testverfahren.

b) $$P = \frac{0{,}9\cdot 0{,}01}{0{,}1\cdot 0{,}98 + 0{,}9\cdot 0{,}01} = 0{,}084 = 8{,}4\,\%$$

In Bevölkerungsgruppen mit hoher Durchseuchung ist Entspannung nach einem positiven Ergebnis also nicht mehr angebracht.

5 Große Wahrscheinlichkeits-Bäume → hypergeometrische und binomiale Verteilungen

5.1 Grenzübergang



Es handelt sich um eine binomiale Verteilung mit p=10% und dem Stichprobenumfang n=10.

a) $P_{(x=0;\,n=10)}=0{,}9^{10}\cdot 1=0{,}3487$

34,87% =BinomVert(x=1; n=10; p=0,1; 0)[1]

b) $P_{(x=2;\,n=10)}=0{,}9^{8}\cdot 0{,}1^{2}\cdot 45=0{,}1937$

19,37% =BinomVert(x=2; n=10; p=0,1; 0)

c) $P_{(x\le 2;\,n=10)}=P_{(x=0;\,n=10)}+P_{(x=1;\,n=10)}+P_{(x=2;\,n=10)}$

$=0{,}9^{10}\cdot 0{,}1^{0}\cdot 1+0{,}9^{9}\cdot 0{,}1^{1}\cdot 10+0{,}9^{8}\cdot 0{,}1^{2}\cdot 45=0{,}9298$

92,98% =BinomVert(x≤2; n=10; p=0,1; 1)[2]

d) $P_{(x\ge 2;\,n=10)}=P_{(x=2;\,n=10)}+P_{(x=3;\,n=10)}+\,..+P_{(x=10;\,n=10)}$

$=0{,}9^{8}\cdot 0{,}1^{2}\cdot 45+0{,}9^{7}\cdot 0{,}1^{3}\cdot 120+\,..+0{,}9^{0}\cdot 0{,}1^{10}\cdot 1$

$=0{,}2639$

26,39% = 1 – BinomVert(x≤1; n=10; p=0,1; 1)[3]

e) $P_{(x<2;\,n=10)}=P_{(x\le 1;\,n=10)}=P_{(x=0;\,n=10)}+P_{(x=1;\,n=10)}$

$=0{,}9^{10}\cdot 0{,}1^{0}\cdot 1+0{,}9^{9}\cdot 0{,}1^{1}\cdot 10=0{,}7361$

73,61% =BinomVert(x≤1; n=10; p=0,1; 1)[4]

f) $P_{(x>2;\,n=10)}=P_{(x\ge 3;\,n=10)}$

$=P_{(x=3;\,n=10)}+P_{(x=4;\,n=10)}+\,..+P_{(x=10;\,n=10)}$

$=0{,}9^{7}\cdot 0{,}1^{3}\cdot 120+0{,}9^{6}\cdot 0{,}1^{4}\cdot 210+\,..+0{,}9^{0}\cdot 0{,}1^{10}\cdot 1$

$=0{,}0702$

7,02% = 1 – BinomVert(x≤1; n=10; p=0,1; 1)

Alternative Formel: =B(n; p; x_{unten}; x_{oben})

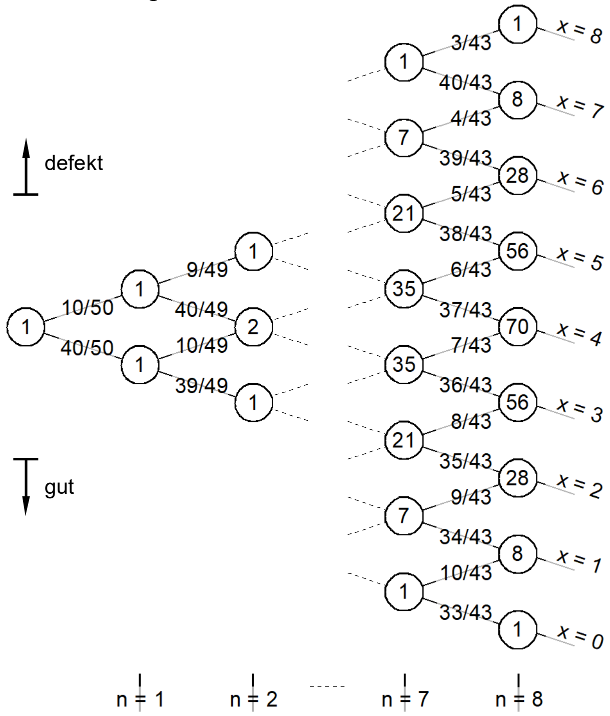
[1] In Tabellenkalkulation wie Excel, OpenOffice Calc oder LibreOffice Calc gibt man die Formel ohne die Parameterbezeichnungen ein, also: =BinomVert(1; 10; 0,1; 0). 0 im 4. Argument bedeutet „Einzel-Wahrscheinlichkeit“, also nur für x=1.

[2] x≤2 ist die hier verwendete Schreibweise für die untere Summenwahrscheinlichkeit, für die alle Wahrscheinlichkeitswerte von x=0 bis x=2 addiert werden. Bei Binomialverteilungen in Tabellenkalkulationen gibt man für x eine 2 ein und schaltet die untere Summenwahrscheinlichkeit mit einer 1 im 4. Argumente ein: =BinomVert(2; 10; 0,1; 1)

[3] Tabellenkalkulationen rechnen obere Summenwahrscheinlichkeiten nicht direkt aus. Man kann sich behelfen, indem man die untere Summenwahrscheinlichkeit unter x≥2, also x≤1 von 100% abzieht.

[4] Untere Summenwahrscheinlichkeit rechnen einschließlich des Grenzwertes x. Da bei „weniger als“ die 2 nicht mitzählt, muss man x≤1 einsetzen.

5.2 DVD-Rohlinge



Hypergeometrische Verteilung mit N=50; d=10; n=8

a) $P_{(x=0)}=\frac{40}{50}\cdot\frac{39}{49}\cdot\frac{38}{48}\cdot\frac{37}{47}\cdot\frac{36}{46}\cdot\frac{35}{45}\cdot\frac{34}{44}\cdot\frac{33}{43}\cdot 1=0{,}1432$

14,32% =HypGeomVert(x=0; n=8; d=10; N=50)[5]

b) $P_{(x=3)}=\frac{40}{50}\cdot\frac{39}{49}\cdot\frac{38}{48}\cdot\frac{37}{47}\cdot\frac{36}{46}\cdot\frac{10}{45}\cdot\frac{9}{44}\cdot\frac{8}{43}\cdot 56=0{,}1471$

14,71% =HypGeomVert(x=3; n=8; d=10; N=50)

c) $P_{(x\le 3)}=P_{(x=0)}+P_{(x=1)}+P_{(x=2)}+P_{(x=3)}$

$=\frac{40}{50}\cdot\frac{39}{49}\cdot\frac{38}{48}\cdot\frac{37}{47}\cdot\frac{36}{46}\cdot\frac{35}{45}\cdot\frac{34}{44}\cdot\frac{33}{43}\cdot 1$

$+\frac{40}{50}\cdot\frac{39}{49}\cdot\frac{38}{48}\cdot\frac{37}{47}\cdot\frac{36}{46}\cdot\frac{35}{45}\cdot\frac{34}{44}\cdot\frac{10}{43}\cdot 8$

$+\frac{40}{50}\cdot\frac{39}{49}\cdot\frac{38}{48}\cdot\frac{37}{47}\cdot\frac{36}{46}\cdot\frac{35}{45}\cdot\frac{10}{44}\cdot\frac{9}{43}\cdot 28$

$+\frac{40}{50}\cdot\frac{39}{49}\cdot\frac{38}{48}\cdot\frac{37}{47}\cdot\frac{36}{46}\cdot\frac{10}{45}\cdot\frac{9}{44}\cdot\frac{8}{43}\cdot 56$

$=0{,}1432+0{,}3473+0{,}3217+0{,}1471=0{,}9593$

95,93% =HypGeomVert(x≤3; n=8; d=10; N=50)[6]

= HypGeomVert(x=0; n=8; d=10; N=50)
+HypGeomVert(x=1; n=8; d=10; N=50)
+HypGeomVert(x=2; n=8; d=10; N=50)
+HypGeomVert(x=3; n=8; d=10; N=50)

= 0,1432 +0,3473 +0,3217 +0,1471 = 95,93%

d) 18,78% =HypGeomVert(x≥3; n=8; d=10; N=50)[7]

= HypGeomVert(x=3; n=8; d=10; N=50)
+HypGeomVert(x=4; n=8; d=10; N=50)
….
+HypGeomVert(x=10; n=8; d=10; N=50)

= 0,1471 +0,0357 +0,0046 +0,0003 +0,0000089 +0,000000084 = 18,78%

e) 81,22% =HypGeomVert(x<3; n=8; d=10; N=50)

f) 4,07% =HypGeomVert(x>3; n=8; d=10; N=50)

[5] In Tabellenkalkulation wie Excel, OpenOffice Calc oder LibreOffice Calc gibt man die Formel ohne die Parameterbezeichnungen ein, also: =HypGeomVert(0; 8; 10; 50).

[6] x≤3 ist die hier verwendete Schreibweise für die untere Summenwahrscheinlichkeit, für die alle Wahrscheinlichkeitswerte von x=0 bis x=3 addiert werden. Bei hypergeometrischen Verteilungen können Tabellenkalkulationen keine Summenwahrscheinlichkeiten rechnen, sondern müssen auch die Werte der Einzelwahrscheinlichkeiten addieren.

[7] Auf die aufwendige Rechnung mit dem W-Baum wird ab sofort verzichtet.

5.3 Schrauben

a) 0,57% = 57/10000 (Einzelwahrsch.)

b) = 5,41% (obere Summenwahrsch.)
=BinomVert(x≥3; n=100; p=85/10000;)

c) = 5,94% (obere Summenw)
=HypgeomVert(x≥1; n=4; d=152; N = 10000)

d) = 5,81% (Einzelw.)
=HypgeomVert(x=1; n=4; d=152; N = 10000)

W-Baum ergänzen

5.4 Roulette

a) = 47,97% (obere Summenwahrsch.)
=BinomVert(x≥2, n=3; p=18/37;)

b) = 34,42% (obere Summenwahrsch.)
=BinomVert(x≥6, n=10; p=18/37;).
Schlussfolgerung: Wenn man Geld braucht, muss man alles auf eine Karte setzen.

5.5 Lotto 6 aus 45 (Österreich)

a) 0,0000123% =HypgeomVert(x=6; n=6; d=6; N=45)

$$P(6)=\frac{6}{45}\cdot\frac{5}{44}\cdot\frac{4}{43}\cdot\frac{3}{42}\cdot\frac{2}{41}\cdot\frac{1}{40}=\frac{1}{8'145'060}$$

b) 0,00287% =HypgeomVert(x=5; n=6; d=6; N=45)

$$P(5)=6\cdot\frac{39\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{45\cdot44\cdot43\cdot42\cdot41\cdot40}=\frac{1}{34808}$$

c) 0,136% =HypgeomVert(x=4; n=6; d=6; N=45)

$$P(4)=15\cdot\frac{39\cdot38\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{45\cdot44\cdot43\cdot42\cdot41\cdot40}=\frac{1}{732{,}8}=0{,}001364$$

d) 2,24% =HypgeomVert(x=3; n=6; d=6; N=45)

$$P(3)=20\cdot\frac{39}{49}\cdot\frac{38}{48}\cdot\frac{37}{47}\cdot\frac{6}{46}\cdot\frac{5}{45}\cdot\frac{4}{44}=\frac{1}{44{,}6}$$

e)

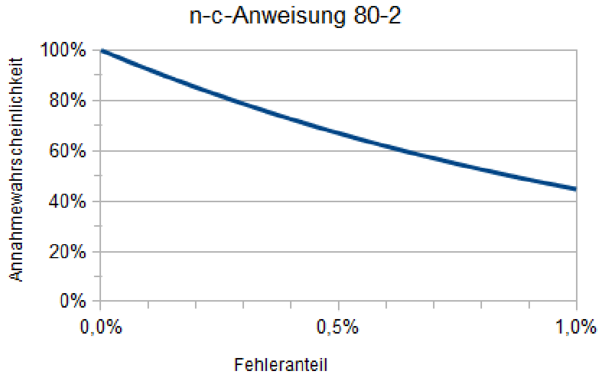
$$\begin{aligned}&E(\mathit{Lotto\ in\ A})\\&=P(6)\cdot A(6)+P(5)\cdot A(5)\\&\quad+P(4)\cdot A(4)+P(3)\cdot A(3)\\&=\frac{1}{8145060}\cdot1700000\,€+\frac{1}{34808}\cdot2150\,€\\&\quad+\frac{1}{732{,}8}\cdot50\,€+\frac{1}{44{,}6}\cdot5\,€\\&=0{,}45\,€\end{aligned}$$

Hinweis: In den Angaben sind die Zusatzzahlen überschlägig eingerechnet. Dazu gehört nicht die österr. Regel, dass für 0 Richtige mit Zusatzzahl 1,10 € ausbezahlt wird. Diese Regel erhöht den Erwartungswert um ca. 7 Ct.

5.6 n-c-Anweisungen

a) Beispiel Fehleranteil 0,2% bei n-c 80-2
=BinomVert(x=2; n=80; p=0,2%, 1)

Fehleranteil	0,0%	0,2%	0,4%	0,6%	0,8%	1,0%
Annahmewahrscheinlichkeit	100,0%	85,2%	72,6%	61,8%	52,6%	44,8%



b) fehlt

c) Große Stichproben erhöhen den Aufwand für die Prüfung, aber auch die Trennschärfe.

d) Wenn der Lieferant gute Ware liefert und bei der Stichprobenprüfung nach AQL nur Pech gehabt hat (Lieferantenrisiko), könnte er seine Ware nochmals liefern.

5.7 Festplatten

a) = 80,98% (untere Summenwahrsch.)
=BinomVert(x≤2 ; n=100; p=1,5%,)

b) = 19,02% (obere Summenwahrsch.)
=BinomVert(x≥3 ; n=100; p=1,5%,).

c) siehe AB AQL

5.8 Großhandelskette

a) Die n-c-Anweisung bei AQL 0,25 für eine Losgröße 1000 lautet 50-0. Das bedeutet, dass n=50 zufällig gewählte Teile geprüft werden. Wenn mehr als c=0 Teile Ausschuss sind, wird das Los zurückgewiesen, ansonsten angenommen.

b) Lieferantenrisiko = Rückweisewahrscheinlichkeit, wenn das Los in der vereinbarten Qualität geliefert wird = Wahrscheinlichkeit, dass in der Stichprobe mehr als c=0 Ausschussteile gefunden werden.
9,53% = 1 – BinomVert(x≤0; n=50; p=0,2%; 1)
obere Summenwahrscheinlichkeit für x≥1

c) Kundenrisiko = Annahmewahrscheinlichkeit, wenn das Los schlechter als vereinbart geliefert wird = Wahrscheinlichkeit, dass in der Stichprobe c=0 (oder weniger ;-) Ausschussteile gefunden werden.
86,05% = BinomVert(x=0; n=50; p=0,3%; 0)
86,05% = BinomVert(x≤0; n=50; p=0,3%; 1)

d) Wenn 2 von 5 aufeinanderfolgenden Lieferungen zurückgewiesen wurden, wird auf verschärfte Prüfungen umgestellt.

6 Übungen kreuz und quer

6.1 Glühlampen

a) 34,54% =HypgeomVert(x=0; n=12; d=8; N=100)
b) 4,63% =HypgeomVert(x=3; n=12; d=8; N=100)
c) 99,33% =HypgeomVert(x≤3; n=12; d=8; N=100)
d) 5,30% =HypgeomVert(x≥3; n=12; d=8; N=100)
e) 94,70% =HypgeomVert(x<3; n=12; d=8; N=100)
f) 0,67% =HypgeomVert(x>3; n=12; d=8; N=100)

6.2 Kartenspiel

a) =HypgeomVert(x=8; n=8; d=16; N=32) = 0,001223
$$=\frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26\cdot 25}\cdot 1=0{,}00122$$
b) =HypgeomVert(x=8; n=8; d=8; N=32) = 9,507E-08
$$=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26\cdot 25}\cdot 1=0{,}315$$
c) =HypgeomVert(x=4; n=16; d=8; N=32) = 0,315
$$=\frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26\cdot 25}\cdot 70=0{,}315$$

6.3 Widerstände

a) =BinomVert(x≥1; n=4; P=0,05) = 0,18549
b) =BinomVert(x=1; n=4; P=0,05) = 0,171

6.4 Leuchten

a) 0,7364 =HypgeomVert(x=0; n=10; d=30; N=1000)
0,2299 =HypgeomVert(x=1; n=10; d=30; N=1000)
0,0312 =HypgeomVert(x=2; n=10; d=30; N=1000)
$2{,}42\cdot 10^{-3}$ =HypgeomVert(x=3; ...)
$0{,}119\cdot 10^{-3}$ =HypgeomVert(x=4; ...)
$3{,}83\cdot 10^{-6}$ =HypgeomVert(x=5; ...)
$82{,}6\cdot 10^{-9}$ =HypgeomVert(x=6; ...)
$1{,}17\cdot 10^{-9}$ =HypgeomVert(x=7; ...)
$10{,}4\cdot 10^{-12}$ =HypgeomVert(x=8; ...)
$52{,}9\cdot 10^{-15}$ =HypgeomVert(x=9; …)
$0{,}114\cdot 10^{-15}$ =HypgeomVert(x=10; …)

b) 0,7374 =BinomVert(x=0; n=10; p=0,03; 0)
0,2281 =BinomVert(x=1; n=10; p=0,03; 0)
0,0317 =BinomVert(x=2; n=10; p=0,03; 0)
$2{,}61\cdot 10^{-3}$ =BinomVert(x=3; n=10; p=0,03; 0)
$0{,}142\cdot 10^{-3}$ =BinomVert(x=4; ...)
$5{,}26\cdot 10^{-6}$ =BinomVert(x=5; ...)
$136\cdot 10^{-9}$ =BinomVert(x=6; ...)
$2{,}395\cdot 10^{-9}$ =BinomVert(x=7; ...)
$27{,}8\cdot 10^{-12}$ =BinomVert(x=8; ...)
$191\cdot 10^{-15}$ =BinomVert(x=9; …)
$0{,}590\cdot 10^{-15}$ =BinomVert(x=10; ...)

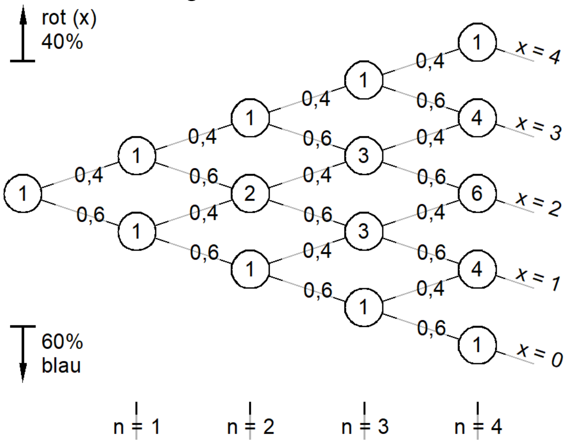
c) Beim Stichprobenumfang n=10 betragen die Abweichungen zwischen den Verteilungsmodellen kaum über 0,5%, in der Summenwahrscheinlichkeit noch weniger. Ab x=4 erscheinen die Abweichungen zwar größer, aber dies spielt sich im Bereich von Bruchteilen von Prozenten ab.

d) Bei größerem Stichprobenumfang werden die Unterschiede größer.
Bei Stichproben, die nicht mehr als 10% der Gesamtmenge umfassen (N/n >10), kann man die Wahrscheinlichkeiten mit der binomialen Verteilung berechnen, obwohl eigentlich einer hypergeometrische Verteilung vorliegt. Als es noch keine Computer gab, war dies eine wesentliche Erleichterung. Heutzutage ist diese Näherung eigentlich nicht mehr notwendig.

6.5 Knöpfe

a) =BinomVert(x≥3; n=50; P=0,05) = 0,23959
b) =BinomVert(x≥7; n=100; P=0,05) = 0,23399

6.6 Schutzumschläge



a) P(a) = P(rot=0; n=4)+P(rot=1; n=4)+P (rot=2; n=4)
$$P=0{,}6^4\cdot 0{,}4^0\cdot 1+0{,}6^3\cdot 0{,}4^1\cdot 4+0{,}6^2\cdot 0{,}4^2\cdot 6$$
$$=0{,}1296\cdot 1+0{,}0864\cdot 4+0{,}0576\cdot 6$$
$$=0{,}1296+0{,}3456+0{,}3456=0{,}8208$$
82,08% =BinomVert(x<=2; n=3; p=0,4; 1)
untere Summenwahrscheinlichkeit x<=2

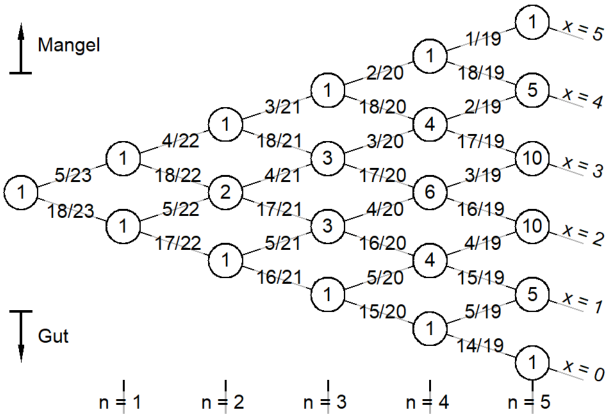
6.7 Schrauben

a) P = 57/10000 = 0,0057 = 0,57%
b) =BinomVert(x=3; n=100; P=85/10000)
= 0,054119 = 5,4%
c) = 1 - HypgeomVert(x=1; n=4; d=152; N=10000)
= 1 – 0,9406 = 0,059436
d) HypgeomVert(x=1; n=4; d=152; N=10000)= 5,8%.

6.8 Fan-Artikel

a) =BinomVert(x≥6; n=10; P=0,7)= 84,97%
b) =HypgeomVert(x=3; n=3; d=3; N=10) = 0,83%
c) Hoffentlich gar nicht !

6.9 Schulbücher



a) $P=\frac{5}{23}=0{,}2174$
21,74% =HypgeomVert(x=1; n=1; d=5; N=23)

b) $P=\frac{5\cdot 4}{23\cdot 22}\cdot 1=\frac{10}{253}=0{,}03953$
3,95% =HypgeomVert(x=2; n=2; d=5; N=23)

c) $P=\frac{5\cdot 4\cdot 18}{23\cdot 22\cdot 21}\cdot 2=\frac{720}{10626}=\frac{120}{1771}=0{,}06778$
der Faktor 2 weicht vom Pascalschen Faktor ab, weil nicht alle Wege zum Knoten (n=3; x=2) zugelassen sind, denn der Knoten (n=1; x=0) ist nicht erlaubt.

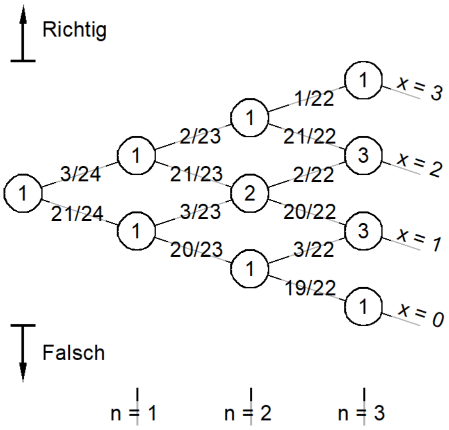
6.10 Multiple-Choice-Aufgaben

a) P = 1 / 5 = 20%

b) P = 0,0369% = BinomVert(x≥13; n=25; p=0,20)

c) P = 19,6% = BinomVert(x=5; n=25; p=0,20)

6.11 Lotto 3 aus 24



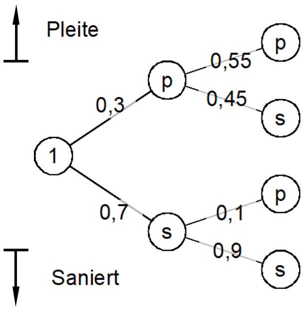
a) $P(x=3)=\frac{3\cdot 2\cdot 1}{24\cdot 23\cdot 22}\cdot 1=\frac{1}{2024}=0{,}0004941$

0,094% = HypgeomVert(x=3; n=3; d=3; N=24)

b) $P(x=2)=\frac{3\cdot 2\cdot 21}{24\cdot 23\cdot 22}\cdot 3=\frac{63}{2024}=0{,}03113$

3,11% = HypgeomVert(x=2; n=3; d=3; N=24)

6.12 Schuldenkrise



a) $P=0{,}3\cdot 0{,}55=0{,}165$

b) $P=0{,}3\cdot 0{,}55+0{,}7\cdot 0{,}1=0{,}235$

c) $P=0{,}7\cdot 0{,}1=0{,}07$

d) $E=0{,}3\cdot 0{,}55\cdot(150+350)\,Mrd\,€+0{,}3\cdot 0{,}45\cdot 150\,Mrd\,€$
$+0{,}7\cdot 0{,}1\cdot 350\,Mrd\,€+0{,}7\cdot 0{,}9\cdot 0\,Mrd\,€$
$=127{,}25\,Mrd\,€$

6.13 FC Q-Dorf

a) P = 1 / 10 = 10%

b) 18,41% = BinomVert(x≥3; n=15; p=0,10)

c) 27,02% = BinomVert(x=1; n=20; p=0,10)

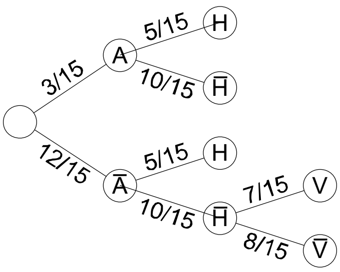
6.14 Lotto 7 aus 36

P(x=5) = 0,102% = HypgeomVert(x=5; n=7; d=7; N=36) oder

$$P=\frac{29\cdot 28\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{36\cdot 35\cdot 34\cdot 33\cdot 32\cdot 31\cdot 30}\cdot 21=0{,}102\,\%$$

6.15 Computersaal

Für den W-Baum der Aufg. a bis c untersucht man einen PC zuerst nach Fehler A, dann nach Fehler H usw.



a) $P=\frac{12}{15}\cdot\frac{10}{15}\cdot\frac{8}{15}=28{,}4\,\%$

b) $P=\frac{3}{15}\cdot\frac{5}{15}=6{,}67\,\%$

c) $P=\frac{3}{15}\cdot\frac{5}{15}+\frac{3}{15}\cdot\frac{10}{15}+\frac{12}{15}\cdot\frac{5}{15}=\frac{3}{15}+\frac{12}{15}\cdot\frac{5}{15}$
$=\frac{3\cdot 15}{15\cdot 15}+\frac{12}{15}\cdot\frac{5}{15}=46{,}7\,\%$

$P=1-\frac{12}{15}\cdot\frac{10}{15}=46{,}7\,\%$

Für den W-Baum der Aufgabe d setzt sich Schüler 1 an einen PC 1 und prüft, ob er Viren hat, danach Schüler 2 an PC 2 usw.

d) $P=\frac{10}{15}\cdot\frac{9}{14}\cdot\frac{8}{13}=26{,}37\%$

P(3 von 3 PC ohne H) = 26,37% = HypgeomVert(x=3; n=3; d=10; N=15) oder P(0 von 3 PC mit H) = 26,37% = HypgeomVert(x=0; n=3; d=5; N=15)

6.16 Lotto 7 aus 35

P(x=5) = 0,118% = HypgeomVert(x=5; n=7; d=7; N=35) oder

$$P=\frac{28\cdot 27\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{35\cdot 34\cdot 33\cdot 32\cdot 31\cdot 30\cdot 29}\cdot 21=0{,}118\,\%$$

6.17 Bankentest 1

a) P(x=5) = 0,2147 = HypgeomVert(x=5; n=8; d=16; N=21)

b) P(x≥5) = P(x=5) + P(x=6) + P(x=7) + P(x=8) = 0,2147 + 0,3935 + 0,2911 + 0,0632 = 0,9525
Das bisher verwendete Tabellenblatt funktioniert nicht automatisch, weil es nur 5 Banken mit einer anderen Wertung als ausreichend gab. Deshalb ist es nicht möglich, weniger als 8-5 ausreichende Banken zu finden. Das Blatt gibt an dieser Stelle eine Fehlermeldung aus, dadurch werden auch die Summenhäufigkeiten nicht berechnet.
Man kann sich behelfen, indem man die Einzelhäufigkeit von x=5 bis x=8 summiert.

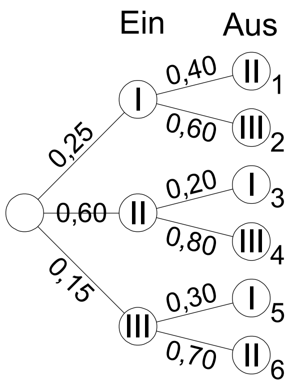
c) Es gibt keine guten Banken (in der Stichprobe).

6.18 Bankentest 2

a) 2,663% = BinomVert(x=5; n=13; p=15%; ...)
Einzelwahrscheinlichkeit x=5

b) 0,0099% = BinomVert(x≥7; n=13; p=10%; ...)
obere Summenwahrscheinlichkeit x>6

6.19 Kreisverkehr



a) Knoten 2:
$P=0{,}25\cdot 0{,}60=0{,}15$

b) Knoten 2; 4:
$P=0{,}25\cdot 0{,}60+0{,}60\cdot 0{,}80$
$=0{,}15+0{,}48=0{,}63$

c) Knoten 2; 4:
$P=\frac{P_4}{P_2+P_4}$
$=\frac{0{,}60\cdot 0{,}80}{0{,}25\cdot 0{,}60+0{,}60\cdot 0{,}80}$
$=\frac{0{,}48}{0{,}63}=0{,}762$

d) Knoten 1;2;6:
$P=0{,}25\cdot 0{,}40+0{,}25\cdot 0{,}60+0{,}15\cdot 0{,}70$
$=0{,}25+0{,}15\cdot 0{,}70=0{,}25+0{,}105=0{,}355$

6.20 Weihnachtsmann 1
a) 57,95% = 51/(37+51)
b) 35,4% = HypgeomVert(x=3; n=5; d=51; N=88)
c) 1,79% = HypgeomVert(x≤7; n=20; d=51; N=88)
d) 18,98% = HypgeomVert(x=3; n=3; d=51; N=88)
e) 82,0% = HypgeomVert(x≥6; n=12; d=51; N=88)

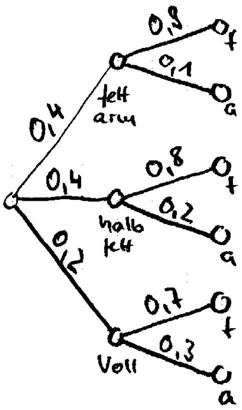
6.21 Weihnachtsmann 2
a) $P = 18\% \cdot 40\% = 7{,}2\%$
b) $P = \frac{60\% \cdot 20\% + 18\% \cdot 60\% + 22\% \cdot 30\%}{60\% + 18\% + 22\%}$
$= 12\% + 10{,}8\% + 6{,}6\% = 29{,}4\%$
c) $P = \frac{18\% \cdot 60\% + 22\% \cdot 30\%}{18\% + 22\%} = \frac{1740\%^2}{40\%} = 43{,}5\%$
d) =BinomVert(x≥6; n=20; p=70%;)

6.22 Noten-Würfel
a) 1/6
b) 50% = 3 x 1/6 = 50%
c) 24,26% = BinomVert(x=3; n=19; p=1/6; 0)
Einzelwahrscheinlichkeit
d) 36,43% = BinomVert(x≤2; n=19; p=1/6; 1)
untere Summenwahrscheinlichkeit
e) 3,13% = BinomVert(x=0; n=19; p=1/6; 0)
Einzelwahrscheinlichkeit

6.23 A5 fehlt

6.24 Abwrackprämie
a) Prüfungen nach AQL ist für serienweise Prüfungen sinnvoll und spart Prüfkosten.
b) AQL 1,0 normal bei Losgröße 400: n-c = 50-1
50 Teile werden geprüft, maximal 1 darf Ausschuss sein.
c) P = 9,52% = 1 - BinomVert(x≥1; n=50; p=0,2%; 1)
obere Summenwahrscheinlichkeit für x≥1
d) P = 86,05% = BinomVert(x≤0; n=50; p=0,3%; 1)
untere Summenwahrscheinlichkeit für x<=0
e)
f) 1. Nach einigen erfolgreichen Annahmen wird der Stichprobenumfang kleiner. (AQL reduziert)
2. Annahmeprüfungen werden übersprungen (Skip Lot).

6.25 Milchtüten Regal
a) $P = 0{,}4 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}3$
$= 18\ \%$
b) $P = 0{,}4 \cdot 0{,}9 = 36\%$
c) $P = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}2}{0{,}2 \cdot 0{,}30 + 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}40 \cdot 0{,}1}$
$= \frac{0{,}12}{0{,}18} = \frac{2}{3} = 66{,}7\%$



6.26 Milchtüten Füllung
a) Unten: 0,0429% =NORM-VERT(Gu = 0,95 l; µ = 1,0 l;s=0,015l;WAHR())
Oben: 0,0429% =1-NORM-VERT(Go = 1,05 l; µ = 1,0 l;s=0,015l;WAHR())
Gesamt: 0,0858%
b) 72,97% = BinomVert(x=0; n=315; p=0,1%; 0)
Einzelwahrscheinlichkeit für x=0

6.27 Gewitter
a) p=1-40%=60%
b) 20,07% = BinomVert(x=5; n=10; p=0,4; 0)
c) 91,30% = BinomVert(x≤3; n=5; p=0,4; 0)
d) 0,41% = BinomVert(x=6; n=6; p=0,4; 0)
e) 40% = BinomVert(x=1; n=1; p=0,4; 0)

6.28 Erdgas-Pipeline
a) n-c = 80 – 0
80 Rohre werden geprüft, 0 davon dürfen Ausschuss sein.
b) wenn 80 – 0 auf eine Lieferung von 200 Rohren anwenden würde, würde das die Kosten und die Trennschärfe erhöhen.
c) 11,32% = 1 - BinomVert(x≥1; n=50; p=0,2%; 1)
obere Summenwahrscheinlichkeit dafür, 1 oder mehr Ausschussteile zu finden
d) 85,20% = BinomVert(x≤0; n=80; p=0,15%; 1/0)
untere Summenwahrscheinlichkeit dafür, 0 oder weniger Ausschussteile zu finden

6.29 Musterpolitiker MP
a) P = 30% (Einzelwahrscheinlichkeit)
=BinomVert(x=1; n=1; p=30%; 0)
b) 25,41 % =BinomVert(x=3; n=8; p=30%; 0)
binomiale (Einzel-)Verteilung , genau 3 Fettnäpfchen mit 8 Sprüchen zu erreichen
c) 55,18% =BinomVert(x≤2; n=8; p=30%; 1)
untere Summenwahrscheinlichkeit dafür, 2 oder weniger Fettnäpfchen zu schießen
d) 5,80% = 100% - BinomVert(x≤4; n=8; p=30%; 1)
obere Summenwahrscheinlichkeit dafür, 5 oder mehr Fettnäpfchen zu schießen
e) $= 2{,}47\% = 0{,}7^7 \cdot 0{,}3$
Die Lösung erfolgt mit dem W-Baum, da Wahrscheinlichkeiten mit gegebenen Reihenfolgen nicht mit der Formel der Binomialverteilung lösbar sind.

6.30 Fruchtgummi
a) AQL 0,25 normal bei Losgröße 1000: n-c = 50-0
50 Teile werden geprüft, maximal 0 darf Ausschuss sein.
b) P = 9,52% = 1 - BinomVert(x≥1; n=50; p=0,2%; 1)
obere Summenwahrscheinlichkeit dafür, 1 oder mehr Ausschussteile zu finden
c) P = 86,05% = BinomVert(x0; n=50; p=0,3%; 1)
untere Summenwahrscheinlichkeit dafür, 0 oder weniger Ausschussteile zu finden
d) 1. Nach einigen erfolgreichen Annahmen wird der Stichprobenumfang kleiner. (AQL reduziert)
2. Annahmeprüfungen werden übersprungen (Skip Lot).

6.31 Fußball
a) P = 3/10 = 30%
b) 26,46 % =BinomVert(x=2; n=4; p=30%; 0)
Einzelwahrscheinlichkeit für x=2
c) 35,29% = 1 – BinomVert(x≤3; n=7; p=30%; 1)
obere Summenwahrscheinlichkeit für x≥3 (Tore, die nötig sind, um bei 2 Gegentoren zu gewinnen)
d) P = 49,25% =BinomVert(x≤3; n=12; p=30%; 1)
untere Summenwahrscheinlichkeit für x<4
e) $P = 0{,}7^6 \cdot 0{,}3 = 3{,}53\%$

6.32 Fußbälle

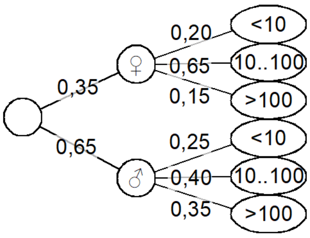
a) AQL 1,0 normal bei Losgröße 500: n-c = 50-1
50 Teile werden geprüft, maximal 1 darf Ausschuss sein.

b) 6,09% = 1 - BinomVert(x≤2; n=50; p=0,8%; 1)
obere Summenwahrscheinlichkeit für x≥3

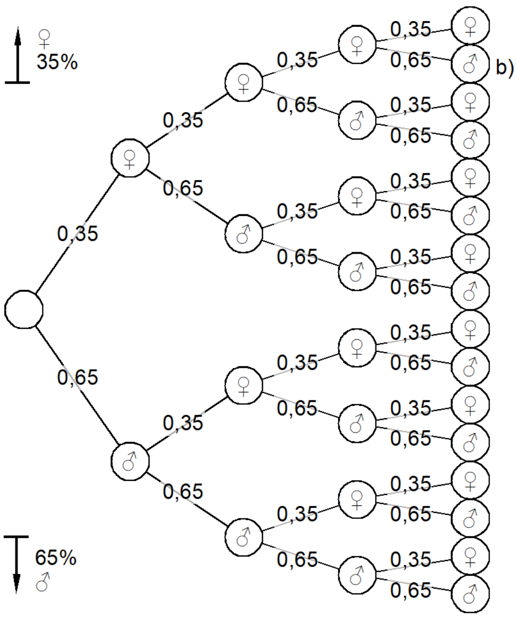
c) 86,22% = BINOMVERT(x≤1; n=50; p=1,3%; 1)
untere Summenwahrscheinlichkeit für x<2

d) 1. Nach einigen erfolgreichen Annahmen wird der Stichprobenumfang kleiner. (AQL reduziert)
2. Annahmeprüfungen werden übersprungen (Skip Lot).

6.33 Drehtür



Drehtür Baum 1



Drehtür Baum 2

a) P = 65% (Einzelwahrscheinlichkeit Baum 1)

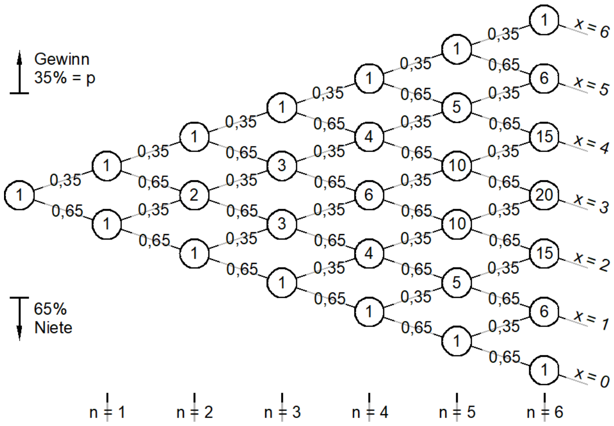
b) $2{,}79\,\% = 0{,}35 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}65$

c) 90,51% =BinomVert(x≤5; n=10; p=35%; 1)
untere Summenwahrscheinlichkeit für x=5 oder weniger Frauen (Baum 2)

d) 2,12% =BinomVert(x=3; n=10; p=65%; 0)
2,12% =BinomVert(x=7; n=10; p=35%; 0)
Einzelwahrscheinlichkeit für x=3 Männer(p=0,65) oder x=7 Frauen (p=0,35)

e) $P = 0{,}65 \cdot 0{,}35 = 22{,}75\,\%$ (Baum 1)

6.34 Losbude



a) P = 35% (Einzelwahrscheinlichkeit)
=BinomVert(x=1; n=1; p=35%; 0)

b) $= 1{,}81\,\% = 0{,}65 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}35$
$= P_{Niete} \cdot P_{Niete} \cdot P_{Gewinn} \cdot P_{Gewinn} \cdot P_{Gewinn}$
Die Lösung erfolgt mit dem W-Baum, da Wahrscheinlichkeiten mit gegebenen Reihenfolgen nicht mit der Formel der Binomialverteilung lösbar sind.

c) 23,55 % =BinomVert(x=3; n=6; p=35%; 0)
Einzelwahrscheinlichkeit für x=3

d) 68,09% = 100% - BinomVert(x≤1; n=6; p=30%; 1)
obere Summenwahrscheinlichkeit für x≥2

6.35 Lebensmittelkonserven

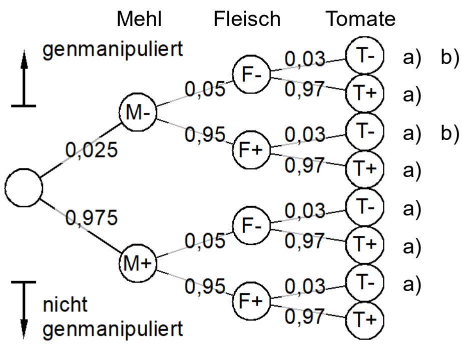
a) P = 25/320 = 7,81%(Einzelwahrscheinlichkeit)
= HypgeomVert(x=1; n=1; d=25; N=320)

b) 56,20%= 1– HypgeomVert(x=0; n=10; d=25; N=320)
obere Summenwahrscheinlichkeit für x≥1

c) 18,65% = HypgeomVert(x=0; n=20; d=25; N=320)
Einzelwahrscheinlichkeit für x=3

d) 94,93 % =
HypgeomVert(x=0; n=5; d=25; N=320)
+ HypgeomVert(x=1; n=5; d=25; N=320)
untere Summenwahrscheinlichkeit für x≤1

6.36 Ravioli



a) $P = 10{,}15\,\% = 0{,}025 + 0{,}975 \cdot 0{,}03 + 0{,}975 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}05$
Oder $P = 10{,}15\,\% = 1 - 0{,}975 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}95$

b) $P = 0{,}075\,\%$
$= 0{,}025 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}03 + 0{,}025 \cdot 0{,}095 \cdot 0{,}03 = 0{,}025 \cdot 0{,}03$

6.37 Schweinhälften

a) n-c = 50 – 2 (AQL 1,0 M normal Prüfniveau II)
Aus einer Stichprobe von 50 Schweinehälften dürfen maximal 2 den Bedingungen nicht entsprechen.

b) Das Kundenrisiko liegt vor, wenn der Lieferant eine schlechtere Qualität liefert als vereinbart. Das Risiko ist dann, dass dies in der Stichprobe nicht bemerkt und die Lieferung angenommen wird.
Das Lieferantenrisiko ist, dass ein Los zufällig zurückgeweisen wird, obwohl ausreichende Qualität geliefert wurde.

c) 1,3% ist schlechter als vereinbart, also hat der Kunden das Risiko. Es beträgt:
97,3% =BinomVert(x=2; n=50; p=1,3%;1)
untere Summenwahrscheinlichkeit für x≤2

d) Eine Prüfung mit größeren Umfang würde die Trennschärfe erhöhen, d.h. Kunden- und Lieferantenrisiken senken, aber es würde mehr kosten.

6.38 DVD-Laufwerke

a) n-c = 50 – 0 (AQL 0,25 H normal Prüfniveau II)
Aus einer Stichprobe von 50 Laufwerke darf keines den Bedingungen nicht entsprechen.

b) 9,53% =1 –BinomVert(x=0; n=50; p=0,2%;1)
obere Summenwahrscheinlichkeit für x≥1

c) 86,05% =BinomVert(x=0; n=50; p=0,3%;1)
untere Summenwahrscheinlichkeit für x≤0

6.39 Joghurtregal

a) P = 12/190 = 6,32% (Einzelwahrscheinlichkeit)
= HypgeomVert(x=1; n=1; d=12; N=190)

b) 71,91% =HypgeomVert(x=0; n=5; d=12; N=190)
Einzelwahrscheinlichkeit x=0

c) 1,65% =HypgeomVert(x=3; n=10; d=12; N=190)
Einzelwahrscheinlichkeit x=3

d) 99,09% =HypgeomVert(x≤2; n=8; d=12; N=190) =
+ HypgeomVert(x=0; n=8; d=12; N=190)
+ HypgeomVert(x=1; n=8; d=12; N=190)
+ HypgeomVert(x=2; n=8; d=12; N=190)
untere Summenwahrscheinlichkeit für x≤2

6.40 Joghurt

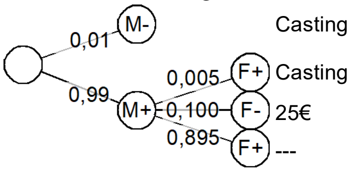
a) n-c = 80 – 2 (AQL 1,0 J normal Prüfniveau II)
Aus einer Stichprobe von 80 Joghurt dürfen maximal 2 den Bedingungen nicht entsprechen.

b) 1,89% = 1 – BinomVert(x≤2; n=80; p=0,7%;1)
obere Summenwahrscheinlichkeit für x≥3

c) 91,34% =BinomVert(x≤2 ; n=80; p=1,3%;1)
untere Summenwahrscheinlichkeit für x≤2

d) Eine Prüfung mit kleinerem Umfang hat den Vorteil geringerer Kosten, dafür den Nachteil geringerer Trennschärfe, d.h. mehr gute Lose werden zurückgewiesen und mehr schlechte Lose angenommen.

6.41 Verlostes Casting



a) $P=1{,}495\,\% = 0{,}01+0{,}99\cdot 0{,}005 \approx 1{,}5\,\%$

b) Erwartungswert E

$$E = P(Casting)\cdot Kosten(Casting) + P(25\,€)\cdot 25\,€$$
$$= (0{,}01+0{,}99\cdot 0{,}005)\cdot 200\,€ + 0{,}99\cdot 0{,}10\cdot 25\,€$$
$$= 0{,}01495\cdot 200\,€ + 0{,}099\cdot 25\,€ = 5{,}465\,€$$
$$Kosten = E\cdot Teilnehmerzahl = 5{,}465\,€\cdot 1000 = 5465\,€$$

6.42 Tiermehl

a) P = 39/130 = 30,0% (Einzelwahrscheinlichkeit)
=HypgeomVert(x=1; n=1; d=39; N=130)

b) 16,25% =HypgeomVert(x=0; n=5; d=39; N=130)
Einzelwahrscheinlichkeit x=0

6.43 Futtermittel

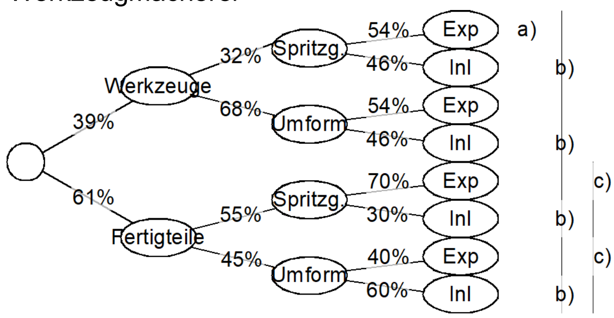
a) P = 0,0247% (Einzelwahrscheinlichkeit)
=BinomVert(x=0; n=11; p=53%; 0)

b) 58,07% = 100% - BinomVert(x≤5; n=11; p=30%; 1)
obere Summenwahrscheinlichkeit für x≥6

c) 94,99% = BinomVert(x≤8; n=11; p=30%; 1)
untere Summenwahrscheinlichkeit für x≤8

d) 34,50% = 99,91% – 65,41%
+ BinomVert(x≤10; n=11; p=30%; 1)
– BinomVert(x≤6; n=11; p=30%; 1)
untere Summenwahrsch. für x≤12 und x<7

6.44 Werkzeugmacherei



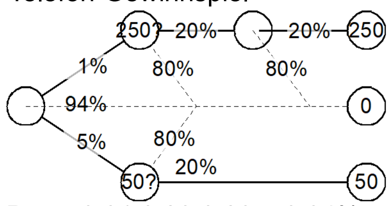
a) $P=6{,}74\,\% = 0{,}39\cdot 0{,}32\cdot 0{,}54$

b) $P=44{,}48\,\%$
$$= 0{,}39\cdot 0{,}32\cdot 0{,}46 + 0{,}39\cdot 0{,}68\cdot 0{,}46$$
$$+ 0{,}61\cdot 0{,}55\cdot 0{,}30 + 0{,}61\cdot 0{,}45\cdot 0{,}60$$

c) $P = 0{,}39\cdot 0{,}32 + 0{,}61\cdot 0{,}55$
$$= 0{,}1248 + 0{,}3355 = 0{,}4603 \approx 46\,\%$$

d) $P = 56{,}5\,\% = \dfrac{0{,}61\cdot 0{,}55\cdot 0{,}70 + 0{,}61\cdot 0{,}45\cdot 0{,}40}{0{,}61}$

6.45 Telefon-Gewinnspiel



a) P_{250} = 0,01·0,20·0,20 = 0,04%
P_{50} = 0,05·0,20 = 1,0% (nicht gefragt)

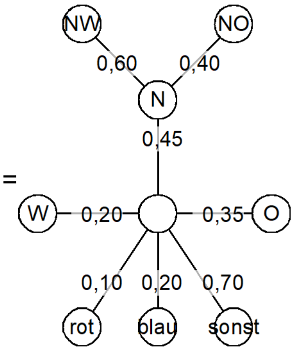
b) Von 1000 Anrufer gewinnen 10,4.
$$n_{Gewinner} = (P_{50\,€} + P_{250\,€})\cdot 1000$$
$$= (0{,}01+0{,}0004)\cdot 1000 = 10{,}4 \ \text{(von 1000)}$$

c) Der Erwartungswert (voraussichtlicher Gewinn pro Spiel) beträgt 60 Cent und der Einsatz 1€, d.h. der Spieler verliert und der Radiosender gewinnt.
$$E = P_{50\,€}\cdot Gewinn_{50\,€} + P_{250\,€}\cdot Gewinn_{250\,€}$$
$$= 0{,}01\cdot 50\,€ + 0{,}0004\cdot 250\,€ = 0{,}60\,€$$

6.46 Kanalrohre
a) P = 19/50 = 38,0% (Einzelwahrscheinlichkeit)
=HypgeomVert(x=1; n=1; d=19; N=50)
b) 19,23% =HypgeomVert(x=5; n=10; d=19; N=50)
Einzelwahrscheinlichkeit x=5
c) 95,06% = 22,93% +47,07% +27,05%
= + HypgeomVert(x=0; n=3; d=19; N=50)
+ HypgeomVert(x=1; n=3; d=19; N=50)
+ HypgeomVert(x=2; n=3; d=19; N=50)
=HypgeomVert(x≤2; n=3; d=19; N=50)
untere Summenwahrscheinlichkeit für x≤2
d) 0,549% =HypgeomVert(x=5; n=5; d=19; n=50)
Einzelwahrscheinlichkeit x=5
e) P = (50-19) / 50 = 62%

6.47 Rohrprüfung
a) n-c = 80-2 (AQL 1,0 normal Prüfniveau II). Das bedeutet, dass n=80 zufällig gewählte Teile geprüft werden. Wenn mehr als c=2 Teile Ausschuss sind, wird das Los zurückgewiesen, ansonsten angenommen.
b) Die n-c-Anweisung müsste dann 50-1 lauten. Die Stichprobe wäre für die eine Lieferung billiger. Wenn man die Kosten für die 550 Rohren fehlenden Lieferungen rechnet, wird es insgesamt teurer.
c) 2,67% = 1 – BinomVert(x≤2; n=80; p=0,8%;1)
obere Summenwahrscheinlichkeit für x≥3
= Lieferantenrisiko
d) 92,80% =BinomVert(x≤2; n=80; p=1,3%;1)
untere Summenwahrscheinlichkeit für x≤2

6.48 Autos aus dem Süden



a) P_{NO} = 0,45·0,40 = 18,0%
b) $P_{blau;NW}$ = 0,20·0,45·0,60 = 5,4%
c) $P_{rot;O\text{-}W}$ = 0,10·(0,20 + 0,35) = 5,5%

6.49 Party-Häppchen 1
a) P = 10/50 = 20% (Einzelwahrscheinlichkeit)
=HypgeomVert(x=1; n=1; d=10; N=50)
b) 0,6122% =HypgeomVert(x=3; n=3; d=10; N=50)
Einzelwahrscheinlichkeit x=3
c) 2,18%= 1– HypgeomVert(x≤2; n=4; d=10; N=50)
obere Summenwahrscheinlichkeit für x≥3
d) 16,31% = 1 – BinomVert(x≤2; n=5; p=0,3; 1)
obere Summenwahrscheinlichkeit für x≥3 (Butter)
oder
16,31% = BinomVert(x≤2; n=5; p=0,7; 1)
untere Summenwahrsch. für x≤2 (Margarine)
16,31%

6.50 Party-Häppchen 2

1. Stufe	***2. Stufe***	***Gesamtanteil***
30% Mann	25% Käse	7,5 %
	35% Wurst	10,5 %
	40% Fisch	12 %
70% Frau	50% Käse	35 %
	20% Wurst	14 %
	30% Fisch	21 %

a) P = 30%· 40% + 70%· 30% = 12% + 21% = 33%
b) P = 33% + 70%· 20% = 33% + 14% = 47%

6.51 Party-Häppchen 3
a) AQL 0,065 L normal Prüfniveau II (200-0)
b) Es handelt sich um eine n-c-Anweisung 200-0. 200 Teile werden entnommen und geprüft, maximal 0 dürfen fehlerhaft sein.
c) 60,62% =BinomVert(x=0; n=200; p=0,0025;1)
untere Summenwahrscheinlichkeit für x≤0
d) 1,09% = BinomVert(x=2; n=200; p=0,0008;1)
Einzelwahrscheinlichkeit für x=2

6.52 Speicherbausteine
a)
b)

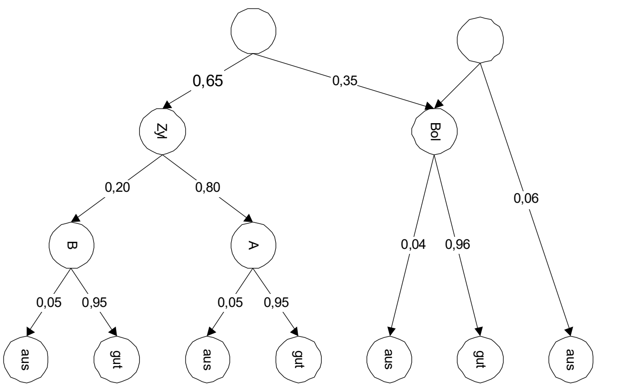
6.53 Drehwiderstände
a)
b)
c)
d)

6.54 Haltegriffe
a) Es handelt sich um eine n-c-Anweisung 80-2. 80 Teile werden entnommen und geprüft, maximal 2 dürfen fehlerhaft sein.
b) binomial 6310 LIB B(x^{3}3; n=80; P=0,005)
= 0,77118%
c) ja, denn der größere Prüfumfang erhöht die Trennschärfe und dies ist für den Lieferanten günstiger, wenn er gute Qualität liefert.
d) binomial 6310 LIB B(x^{3}4; n=125; P=0,005)
= 0,37483% : Lieferantenrisiko ist gesunken.

6.55 Satellitenanlage
a) P = 2/25 = 8%
b) hypergeometrisch 6330 LIB 1 H(x≥1; n=8; M=2; N=25) = 1-0,54667 = 45,333%

6.56 Gute Filme
a) binomial 6310 LIB B(x≥1; n=25; P=0,05) = 0,72261
b) binomial 6310 LIB B(x≥2; n=25; P=0,05) - B(x≥3; n=25; P=0,05) = 0,35762 _ 0,12711 = 0,23051

6.57 Bolzen härten



a) P = 0,35 × 0,96 = 33,6%
b) P = 0,35 × 0,04 + 0,65 × 0,05 = 4,65%
c) P = 0,65 × 0,2 × 0,05 / 0,0465
= 0,0065 / 0,0465 = 13,978%
d) P = 0,06 + 0,96 × 0,04 = 0,06 + 0,0384 = 9,8%

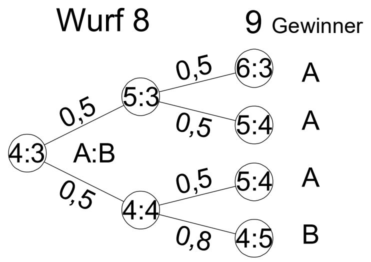
6.58 Potentiometer

a)
b)
c)
d)

7 Hardcore und Entwürfe

7.1 Spielabbruchproblem

a) Wenn man das Spiel gedanklich fortsetzt, ergibt es 3 Gewinnsituationen für A und 1 für B:



Anteil A = 0,5 • 0,5 + 0,5 • 0,5 + 0,5 • 0,5 = 0,75
Anteil B = 0,5 • 0,5 = 0,25

Da die Gewinnsituationen von gleicher Wahrscheinlichkeit sind, müssten die Einsätze im Verhältnis 0,75:0,25 = 3:1 geteilt werden.

b) Fermats Methode basiert darauf, dass alle durchgespielten Möglichkeiten die gleichen Wahrscheinlichkeit 0,5 • 0,5 = 0,25 haben und damit vergleichbar sind. Seine Methode war also korrekt.
Aber man kann das (Gedanken-)Spiel tatsächlich abbrechen, wenn A den 8. Wurf und damit das ganze Spiel gewonnen hat. Nur haben Fermats Kritiker nicht berücksichtigt, dass dieser Fall mit einer anderen Wahrscheinlichkeit eingerechnet werden muss. Mit dem Wahrscheinlichkeitsbaum, der damals noch nicht verwendet wurde, ergibt sich der Anteil von A dann wie folgt:
Anteil A = 0,5 + 0,5 • 0,5 = 0,75

c) Beim Stande von 3:2 werden noch n=4 Münzen geworfen. Die Einzelwahrscheinlichkeit für eine Seite ist p=0,5, und da sie immer gleich ist, handelt es sich um eine Binomialfunktion. A gewinnt, wenn höchstens 2-mal die Münze für B fällt (untere Summenwahrscheinlichkeit. Mit einer Tabellenkalkulation erhält man das Ergebnis:
P(A gewinnt) = BinomVert(x≤2, n=4; p=0,5; 1) = 68,75% = 11/16 = Anteil A.
Wem das zu kompliziert ist, der kann es auch mit einem Wahrscheinlichkeitsbaum rechnen.

7.2 Das Ziegenproblem

Mit der Taktik „Tor beibehalten“ gewinnt man mit der ursprünglichen Wahrscheinlichkeit von 1/3 das Auto. „Tor wechseln“ gewinnt das Auto in den anderen beiden von 3 Fällen!

Begründung: In 1 von 3 Fällen trifft man mit der ersten Wahl das Auto und in 2 von 3 Fällen eine Ziege.

Mit 2/3 Wahrscheinlichkeit liegt man im ersten Zug also falsch, aber von da an wird es eindeutig. Der Moderator öffnet ein Tor mit einer Ziege und das Auto steht hinter dem dritten Tor – in 2/3 aller Fälle, also sollte man wechseln.
Nur wenn man im ersten Zug das Auto erwischt hat (1/3), verliert man durch Wechseln.

Veranschaulichung: Bei der Spielvariante mit 100 Toren und nur einem Auto wählt der Kandidat Tor 23. Anschließend öffnet der Moderator alle Tore außer den Nummern 23 und 38.
Würden Sie bei Tor 23 bleiben?

Wer’s nicht blickt sei getröstet damit, dass sich über diese Aufgabe schon Professoren gestritten haben.

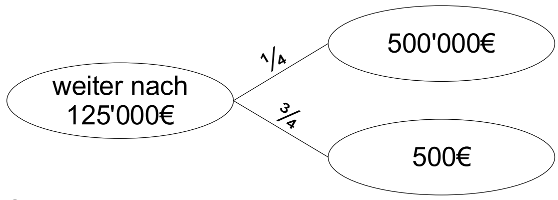
Die Erklärung des Ziegenproblems mit Lösung benötigt etwa 90‘ und wird dennoch von zahl reichen Schülern nicht verstanden. Da es in der Bereich der bedingten Wahrscheinlichkeiten gehört, der nicht im Lehrplan steht, kann man es weglassen. Nach [SdW] 11/1991.

Versuch: Ziegenproblem mit Mohrenköpfen experimentell untersuchen

Das folgende Spiel einmal mit einem Schüler durchspielen, dann spielt jeder mit einem Nach barn. Jeder Schüler erhält einen Mohrenkopf o.ä., alle Schüler laut durchzählen. Zuerst spielen die „Ungeraden“ den Moderator für den Nachbarn mit der nächsthöheren Nummer, anschlie ßend umgekehrt. Als Tore werden Bücher verwendet, als Autos ein markiertes Papier. Gewinnt der Kandidat, muss ihm der Moderator den Mohrenkopf überlassen. Zuletzt wird in einer Strichliste aufgenommen, mit welcher Taktik jeder Schüler gewonnen hätte.

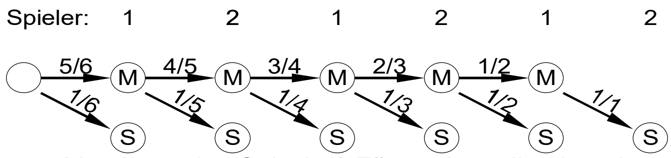
7.3 Wer wird Millionär

a) $$E=\frac{3}{4}\cdot 500\,€+\frac{1}{4}\cdot 500'000\,€=125'375\,€$$



b) Schon beim reinem Zocken ist der Erwartungswert geringfügig höher als die Gewinnsumme bei 'sicherer' Spielweise und kann mit Teilwissen nur höher werden. Dazu kommt die Möglichkeit, auf 1'000'000 € zu erhöhen.
Wenn der gute Zweck mit vielen Sendungen gefördert wird und nicht der einzelne Gewinn, sondern der langfristige Durchschnittswert zählt, sollte man Zocken.
Privatpersonen sollten nicht nur an die nackten Zahlen denken: 4x125'000€ machen nicht 4x zufriedener als 1x125'000€. Da kann wie so oft der 'Spatz' in der Hand die bessere Wahl sein.

7.4 Berliner Roulette

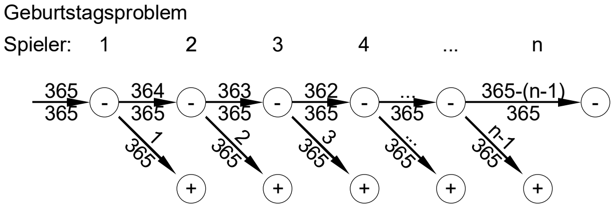


Man kann das Spiel in 6 Züge teilen, die abwechselnd von Spieler 1 und Spieler 2 gespielt werden. Im ersten Zug hat Spieler 1 die Wahrscheinlichkeit 1/6, in Senf zu beißen, dann hat er verloren und das Spiel ist zuende. Trifft er auf Marmelade, kann er den Berliner verspeisen, während Spieler 2 am Biss ist. Für den 2. Zug haben sich die Wahrscheinlichkeiten geändert, da ein Berliner aus dem Spiel ist.
Die Verlustwahrscheinlichkeiten für beide Spieler kann man nach den üblichen Regeln berechnen, die Ergebnisse mit ein bisschen Kürzen ohne Taschenrechner ausrechnen:

a) $$P(\text{Sp.1 verliert})=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=0{,}5$$
$$P(\text{Sp.2 verl.})=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=0{,}5$$

7.5 Geburtstagsproblem[8]

Wie üblich hilft es, einen W-Baum aufzustellen:



Als Ereignisse werden hier die Menschen / Spieler betrachtet, die nacheinander hinzustoßen, und dann die Möglichkeit haben, mit einem bereits Anwesenden am gleichen Tag Geburtstag zu haben (+) oder eben nicht (-).

Spieler 1 hat keine Möglichkeit für (+), bzw. die Sicherheit für (-).

$$P(1\text{-}) = \frac{365}{365} = 100\,\%$$

Der 1. Spieler könnte man in der Betrachtung auch weglassen, aber wenn man 365/365 mitnimmt, wird später die Formel einfacher.

a) Der 2. Spieler hat 1 von 365 Möglichkeiten, mit dem 1. Spieler gemeinsam Geburtstag zu haben.

$$P(2+) = \frac{1}{365}$$

Man kann das Pferd auch von hinten aufzäumen:

$$P(2+) = 1 - P(2\text{-}) = 1 - \frac{364}{365}$$

b) Spätestens ab dem 3. Spieler wird die Methode „von hinten“ einfacher:

$$P(3+) = 1 - P(3\text{-}) = 1 - \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} = 0{,}8\,\%$$

c) Einen noch für 4 Spieler:

$$P(3+) = 1 - P(3\text{-}) = 1 - \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} = 1{,}6\,\%$$

d) Für n Spieler lautet die Formel (mit 365/365):

$$P(n+) = 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365-(n-1)}{365}$$
$$= 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362 \cdot \ldots \cdot [365-(n-1)]}{365^n}$$

.

Ab 23 Schülern liegt die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Schüler an einem Tag Geburtstag haben, schon über 50%:

$$P(23+) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot 343}{365^{23}} = 50{,}8\,\%$$

Die Schreibweise aus der Formelsammlung

$$P(n+) = 1 - \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n}$$

nützt nichts, weil die meisten Taschenrechner wohl n! (n-Fakultät) können, aber bei so großen Zahlen die Zusammenarbeit verweigern.

7.6 Bruchstückhafte Information

a) Es gibt 4 gleich wahrscheinliche Möglichkeiten: M-M; M-J; J-M, J-J.

Je zwei der Möglichkeiten sind gleich bzw. verschieden geschlechtlich, also beträgt die Wahrscheinlichkeit für gleiches Geschlecht 50%.

[8] Wie üblich, vereinfacht man das Problem, indem man Schalttage wegläst und annimmt, dass Geburtstage gleichmäßig über das Jahr verteilt sind. In der Praxis stimmt das nicht, da Tiere bevorzugt in nahrungsmittelreichen Jahreszeiten gebären, also im Frühling. Menschen sind keine Tiere? Dann überschlagen Sie doch mal kurz, welchen Geburtstermin ein „Bett im Kornfeld ergibt … ;-)

b) Mit der Zusatzinformation „mindestens ein Junge“ entfällt eine der in a) genannten Möglichkeiten, nämlich M-M. Es gibt also nur noch 3 gleich wahrscheinliche Konstellationen: M-J; J-M; J-J.

In 2 von diesen 3 Konstellationen ist das zweite Kind ein Mädchen, also lautet die Antwort 2/3.

c) Jetzt bleiben nur noch 2 gleich wahrscheinliche Konstellationen: J-M; J-J und die Wahrscheinlichkeit für das Mädchen liegt bei 50%.

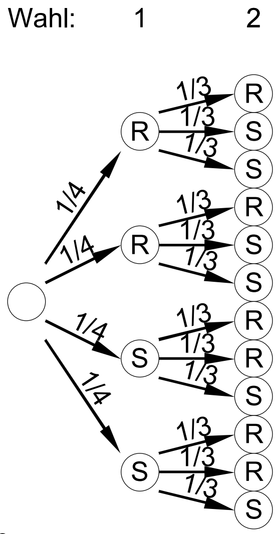
d) Der Unterschied ist, dass die Karten-Aufgabe ein hypergeometrisches Problem darstellt, während Kinder binomial verteilt sind.

Der Unterschied wird vielleicht deutlich, wenn man die Aufgabe auf 3 Karten / Kinder erweitert:

3 Karten können nicht gleichfarbig sein, weil nur je 2 gleiche Karten vorliegen, während 3 Kinder durchaus das gleiche Geschlecht haben können.

7.7 Kartenpaare

a) Kartenpaare



Rechts der vollständige W-Baum beim Kartenziehen.

Beim 1. Zug hat man 2 Möglichkeiten, eine rote, und 2 Möglichkeiten, eine schwarze Karte zu wählen. Jede Möglichkeit ist gleich wahrscheinlich mit 25%.

Im 2. Zug gibt es nur noch 3 Möglichkeiten, nämlich 1 Möglichkeit, die gleiche Farbe zu ziehen, und 2 Möglichkeiten, die andere Farbe zu ziehen.

Die Wahrscheinlichkeit, ein Paar gleicher Farbe zu ziehen, ist also 1/3, während die Wahrscheinlichkeit für ein ungleiches Paar 2/3 beträgt.

7.8 DNA-Test

a) 13 Abschnitte á 10 % bedeutet, dass es 10^{13} = 10 Billionen = 10 Tera Menschen geben kann, deren DNA-Tests nicht identisch sind.

b) Tatsächlich gilt auch für DNA-Tests das Geburtstagsproblem. Theoretisch können sich 365 Menschen ohne einen doppelten Geburtstag versammeln, aber schon ab 23 Menschen wird es unwahrscheinlich.

Eim DNA-Test sind die Zahlen größer. Für das alte Testverfahren mit 8 Abschnitten war schon bei einer mittleren Stadt von 65000 Menschen eine Übereinstimmung mit 5% wahrscheinlich ([Devlin 2008] S.170). Dabei ist noch gar nicht berücksichtigt

– dass bei regionaler Nähe auch verwandschaftliche Beziehungen und daraus resultierende Übereinstimmungen wahrscheinlicher werden.
– dass Tests auch Fehler machen (siehe Aufg. 4.1, Hepatitis-Testverfahren). 2009 wurden in mehreren 100 Kriminalfällen ein identischer Täter vermutet, weil die Probestäbchen für DNA-Tests beim Hersteller verunreinigt wurden.

Deshalb wurde die Anzahl der Abschnitte von 8 auf 13 erhöht, aber bei aktuellen Datenbanken von Millionen Menschen sind auch hier zufällige Übereinstimmungen möglich. Ein DNA-Test ist deshalb als alleiniger Beweis nicht (!) ausreichend.

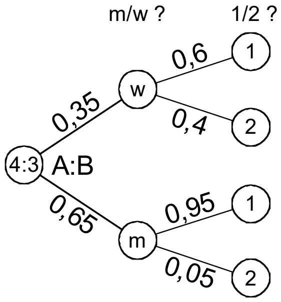
Nach [SdW] 7/97 S.8 „Der Trugschluss des Anklägers“ von Ian Steward

7.9 Hardware-Redundanz

a) fehlt

7.10 Doppelt verschlossene Türe

a)



$$P(w)=\frac{0{,}35\cdot 0{,}6}{0{,}35\cdot 0{,}6+0{,}65\cdot 0{,}05}=81{,}2\,\%$$